Hoàng Chúng (Chủ biên)
Nguyễn Vĩnh Cận
Vũ Thế Hựu

ĐỂ HỌC TỐT
TOÁN 8
ĐẠI SỐ

(Tái bản lần thứ nhất)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Có hai điều có ích cho tôi nhất. Thứ nhất là tôi đã tự học mọi khoa học. Thứ hai là tôi luôn luôn lao vào tìm kiếm những điều mới mẻ ngay lúc mới hiểu được những khái niệm đầu tiên của mỗi khoa học.

W. LEIBNITZ

(Leibnitz 1646-1716, nhà toán học Đức)

CHƯƠNG I

PHÉP NHÂN VÀ PHÉP CHIA CÁC ĐA THỨC

§1. NHÂN ĐA THỨC VỚI ĐA THỨC

1. Lũy thừa với số mũ tự nhiên

Lũy thừa bậc n nguyên dương của x :

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \ldots x}_{n \text{ nhân tử}}$$

Lũy thừa bậc 0 của $x \neq 0$:

$$x^0 = 1$$

Tính chất của lũy thừa

(T_1) : $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

(T_2) : $x^m : x^n = x^{m-n}$ $(x \neq 0,\ m \geq n)$

(T_3) : $(x^m)^n = x^{mn}$

(T_4) : $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$

(T_5) : $(x : y)^n = x^n : y^n$ $(y \neq 0)$

2. Đơn thức, đa thức

Đơn thức là biểu thức trong đó các phép toán thực hiện trên các biến chỉ là phép nhân hoặc lũy thừa không âm.

Ví dụ : $A = 2x^3y$.

Đơn thức A có bậc 3 đối với biến x, bậc 1 đối với biến y và bậc 4 đối với tập hợp các biến x và y.

Một số hữu tỉ được coi là một đơn thức bậc không.

Đa thức là một tổng đại số các đơn thức.

Ví dụ : $P = \frac{1}{2}x^3y + 3xy^2 - 4y$

Đa thức P có bậc 3 đối với x, bậc 2 đối với y và bậc 4 đối với x và y.

3. Quy tắc nhân đa thức

Muốn nhân một đơn thức với một đa thức ta nhân đơn thức với từng hạng tử của đa thức rồi cộng các tích lại với nhau. Kí hiệu các đơn thức bởi A, B,... ta có :

$$A(B + C + D) = AB + AC + AD$$

Muốn nhân một đa thức với một đa thức ta nhân mỗi hạng tử của đa thức này với từng hạng tử của đa thức kia rồi cộng các tích với nhau.

$$(A + B + C)(D + E + G) =$$
$$= AD + AE + AG + BD + BE + BG + CD + CE + CG$$

Bài 1

Thực hiện các phép tính và rút gọn biểu thức :

a) $(x - 1)(4x + 1)$ **b)** $(x + 1)(x^2 + 2x + 4)$

c) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x^4 + x^2 - x + 1)$ **d)** $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$

Đáp số :

a) $4x^2 - 3x - 1$; b) $x^3 + 3x^2 + 6x + 4$

c) $x^7 + x^2 + 1$; d) $x^5 + x + 1$

Nhận xét : Bậc của đa thức tích bằng tổng các bậc của các đa thức nhân tử.

Bài 2

Chứng minh đẳng thức :

a) $(x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4) = x^5 - y^5$

b) $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4) = x^5 + y^5$

c) $(a + b)(a^3 - a^2b + ab^2 - b^3) = a^4 - b^4$

GỢI Ý :

Thực hiện phép nhân các biểu thức ở vế trái, rút gọn, được kết quả bằng vế phải.

Bài 3

Tính giá trị của biểu thức

a) $A = (x - 2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16)$ **với** $x = 3$

b) $B = (x + 1)(x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ **với** $x = 2$

c) $C = (x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$ **với** $x = 2$

GỢI Ý :

Thực hiện phép tính, rút gọn, rồi mới thay giá trị của x.

a) $A = x^5 - 2^5$; b) $B = x^8 - 1$; c) $C = x^7 + 1$.

Bài 4

Tính giá trị của đa thức

a) $P(x) = x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \ldots + 80x + 15$ **với** $x = 79$

b) $Q(x) = x^{14} - 10x^{13} + 10x^{12} - 10x^{11} + \ldots + 10x^2 - 10x + 10$ **với** $x = 9$

GIẢI

a) *Cách thứ nhất*

Nhận xét rằng $80 = 79 + 1$, vì vậy nếu $x = 79$ thì $80 = x + 1$

Khi đó :

$$x^7 - 80x^6 + 80x^5 - 80x^4 + \ldots + 80x + 15 =$$

$$= x^7 - (x+1)x^6 + (x+1)x^5 - (x+1)x^4 + \ldots + (x+1)x + (94 - x)$$

Sau khi rút gọn ta được $P(79) = 94$

Cách thứ hai

Viết đa thức dưới dạng

$$P(x) = x^7 - 79x^6 - x^6 + 79x^5 + x^5 + \ldots + 79x + x + 15$$

$$= x^6(x - 79) - x^5(x - 79) + \ldots - x(x - 79) + x + 15$$

Suy ra $P(79) = 79 + 15 = 94$

b) Giải tương tự câu a) *Đáp số* : 1

Bài 5

Tính giá trị của đa thức

a) $P(x) = x^4 - 17x^3 + 17x^2 - 17x + 20$ với $x = 16$

b) $Q(x) = x^{10} - 13x^9 + 13x^8 - 13x^7 + \ldots + 13x^2 - 13x + 10$ với $x = 12$.

Đáp số : a) 4 b) – 2

Bài 6

Tìm giá trị của x thỏa mãn hệ thức :

a) $(2x - 1)(x^2 - x + 1) - 2x^3 + 3x^2 = 2$

b) $(x + 1)(x^2 + 2x + 4) - x^3 - 3x^2 + 16 = 0$

c) $(x + 1)(x + 2)(x + 5) - x^3 - 8x^2 = 27$

Đáp số : a) $x = 1$ b) $x = \dfrac{-10}{3}$ c) $x = 1$

Bài 7

Chứng tỏ các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

a) $A = x(2x + 1) - x^2(x + 2) + x^3 - x + 3$

b) $B = (x + 1)(x^2 - x + 1) - (x - 1)(x^2 + x + 1)$

GỢI Ý :

Thực hiện các phép tính và rút gọn sẽ được biểu thức không còn chứa x.

Bài 8

Chứng minh rằng :

a) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

b) Nếu $S = a + b + c$ **thì :**

$S(S - 2b)(S - 2c) + S(S - 2c)(S - 2a) + S(S - 2a)(S - 2b) =$

$= (S - 2a)(S - 2b)(S - 2c) + 8abc.$

GỢI Ý :

Thực hiện phép tính ở mỗi vế rồi so sánh kết quả

Bài 9

Giải các phương trình

a) $3x^2 - 3x(-2 + x) = 36$

b) $(3x - 5)(7 - 5x) - (5x + 2)(2 - 3x) = 4$

Đáp số : a) $x = 6$ b) $x = \frac{43}{42}$

Bài 10

Hãy sắp xếp lại các số trong các ô vuông ở hình bên, sao cho tích các số trên mỗi hàng ngang, cột dọc hay đường chéo đều bằng nhau.

2^1	2^2	2^3
2^4	2^5	2^6
2^7	2^8	2^9

GỢI Ý :

Do $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$, nên bài toán được đưa về việc sắp xếp lại các số trong các ô vuông, sao cho *tổng các số mũ* của lũy thừa trên mỗi hàng, mỗi cột hay mỗi đường chéo đều bằng nhau. Từ bảng a) quen thuộc (ma phương bậc 3), ta có lời giải như bảng b).

4	9	2
3	5	7
8	1	6

a)

2^4	2^9	2^2
2^3	2^5	2^7
2^8	2^1	2^6

b)

§2. CÁC HẰNG ĐẲNG THỨC ĐÁNG NHỚ

1. Bình phương của một tổng, một hiệu, tích của một tổng với một hiệu

Dùng các chữ A, B để chỉ các biểu thức đại số ta có các hằng đẳng thức sau :

Bình phương của một tổng

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \qquad (1)$$

Bình phương của một hiệu

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \qquad (2)$$

Tích của tổng và hiệu hai hạng tử

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 \qquad (3)$$

Các hằng đẳng thức (1), (2) và (3) có thể phát biểu như sau :

– Bình phương của một tổng hai hạng tử bằng tổng của bình phương hạng tử thứ nhất với bình phương của hạng tử thứ hai cộng hai lần tích các hạng tử đó :

– Bình phương của một hiệu bằng tổng của bình phương hạng tử thứ nhất với bình phương của hạng tử thứ hai trừ đi hai lần tích của các hạng tử đó.

– Tích của tổng và hiệu hai hạng tử thì bằng hiệu của bình phương hạng tử bị trừ với bình phương hạng tử trừ.

Bài 11

Rút gọn các biểu thức :

a) $P = (y - 3)(y + 3)(y^2 + 9) - (y^2 + 2)(y^2 - 2)$

b) $Q = (3x + 1)^2 - 2(3x + 1)(3x + 5) + (3x + 5)^2$

GỢI Ý :

a) Áp dụng hằng đẳng thức (3). Đáp số $P = -77$

b) Đặt $A = 3x + 1$, $B = 3x + 5$ rồi áp dụng hằng đẳng thức (2)

Đáp số : $Q = 16$

Bài 12

Viết mỗi biểu thức dưới đây thành tổng của hai bình phương

a) $x^2 + 10x + 26 + y^2 + 2y$ **b)** $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$

c) $2x^2 + 2y^2$

GIẢI

a) $x^2 + 10x + 26 + y^2 + 2y = (x^2 + 10x + 25) + (y^2 + 2y + 1) =$

$= (x^2 + 2 . 5 . x + 5^2) + (y^2 + 2 . 1 . y + 1^2)$

$= (x + 5)^2 + (y + 1)^2$

b) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1 = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 + 2y + 1)$

$= (x - y)^2 + (y + 1)^2$

c) $2x^2 + 2y^2 = (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2xy + y^2)$

$= (x + y)^2 + (x - y)^2$

Bài 13

Viết mỗi biểu thức dưới đây thành hiệu của hai bình phương.

a) $(x + y - 6)(x - y + 6)$ **b)** $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3)$

c) $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x)$ **d)** $2ab$

Đáp số : a) $x^2 - (y - 6)^2$; b) $(y - 3)^2 - (2z)^2$;

c) $(2y + 3z)^2 - x^2$; d) $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(a - \frac{b}{2}\right)^2$

Bài 14

Tính nhanh

a) $127^2 + 146 . 127 + 73^2$ **b)** $9^8 . 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

c) $20^2 + 18^2 + 16^2 + ... + 4^2 + 2^2 - (19^2 + 17^2 + ... + 3^2 + 1)$

GỢI Ý :

a) Áp dụng hằng đẳng thức (1) với điều lưu ý rằng 146 = 73.2

b) Áp dụng hằng đẳng thức (3)

c) Viết tổng dưới dạng

$$(20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + ... + (4^2 - 3^2) + (2^2 - 1^2)$$

rồi áp dụng hằng đẳng thức (3)

Đáp số : a) 40.000 b) 1 c) 210

Bài 15

So sánh các cặp số :

a) A = 1997.1999 và B = 1998^2

b) A = $4(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1) \ldots (3^{64} + 1)$ và B = $3^{128} - 1$

GỢI Ý :

a) Từ 1997 = 1998 − 1 và 1999 = 1998 + 1, áp dụng hằng đẳng thức (3) suy ra B > A

b) Viết $4 = \frac{(3+1)(3-1)}{2} = \frac{3^2-1}{2}$ rồi áp dụng hằng đẳng thức (3) liên tiếp một số lần để suy ra B = 2A

Bài 16

Chứng minh rằng với mọi giá trị của biến x các đa thức dưới đây đều nhận giá trị dương.

a) $P(x) = x^2 - 6x + 10$ **b) $Q(x) = x^2 + x + 1$**

c) $R(x) = (x - 3)(x - 5) + 4$

GIẢI

a) Trước hết ta chỉ rõ rằng với mọi số q thì $q^2 \geq 0$. Thật vậy, nếu q = 0 thì $q^2 = 0 \times 0 = 0$

• Nếu $q \neq 0$ thì $q^2 = q \times q$ là tích của hai số cùng dấu, và đó là một số dương, nghĩa là $q^2 > 0$.

Xét $P(x) = x^2 - 6x + 10 = x^2 - 2 . 3 . x + 3^2 + 1$

$= (x - 3)^2 + 1.$

Theo chứng minh trên, cho x giá trị bất kì ta đều có $(x - 3)^2 \geq 0$ do đó $P(x) = (x - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi x.

b) $Q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

c) $R(x) = (x - 3)(x - 5) + 4 = x^2 - 8x + 19 = (x - 4)^2 + 3 > 0$

Bài 17

Chứng minh rằng không có giá trị nào của biến x để đa thức dưới đây nhận được giá trị dương.

a) $P = -x^2 + 4x - 5$ **b) $Q = -9x^2 + 24x - 18$**

GỢI Ý :

a) Xem bài 16, $P = -1 - (x - 2)^2 \leq -1$ với mọi x

b) $Q = -2 - (3x - 4)^2$

Bài 18

Tìm giá trị của biến x để đa thức nhận giá trị lớn nhất.

Trong mỗi trường hợp, xác định giá trị lớn nhất của đa thức.

a) $P = 5 - 8x - x^2$ **b) $Q = 4x - x^2 + 1$**

GỢI Ý :

a) $P = -(x + 4)^2 + 21$. Với $x = -4$, P đạt giá trị lớn nhất là 21 (ta viết : MaxP = 21).

b) $Q = -(x - 2)^2 + 5$. Với $x = 2$, Q đạt giá trị lớn nhất Max Q = 5

Bài 19

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

a) $A = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$

b) $B = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

GIẢI

a) Ta có : $(x - 1)(x + 6) = x^2 + 5x - 6$

$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

$\Rightarrow A = (x^2 + 5x)^2 - 36$

Vì $(x^2 + 5x)^2 \geq 0$ nên $A \geq -36$. Vậy A đạt giá trị nhỏ nhất là -36 (ta viết Min $A = -36$) khi $x^2 + 5x = 0$, tức là khi $x = 0$ hoặc $x = -5$.

b) $B = x^2 - 4x + y^2 - 8y + 6$

$= (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) + 6 - 4 - 16$

$= (x - 2)^2 + (y - 4)^2 - 14 \geq -14.$

B đạt giá trị nhỏ nhất Min $B = -14$ khi $x = 2$ và $y = 4$.

Bài 20

Tìm bốn số tự nhiên a, b, c, d đôi một khác nhau, sao cho $a^2 + 2cd + b^2$ và $c^2 + 2ab + d^2$ đều là số chính phương*.

(Đề thi Olympic toán Mascova, LB Nga, 1999, lớp 8)

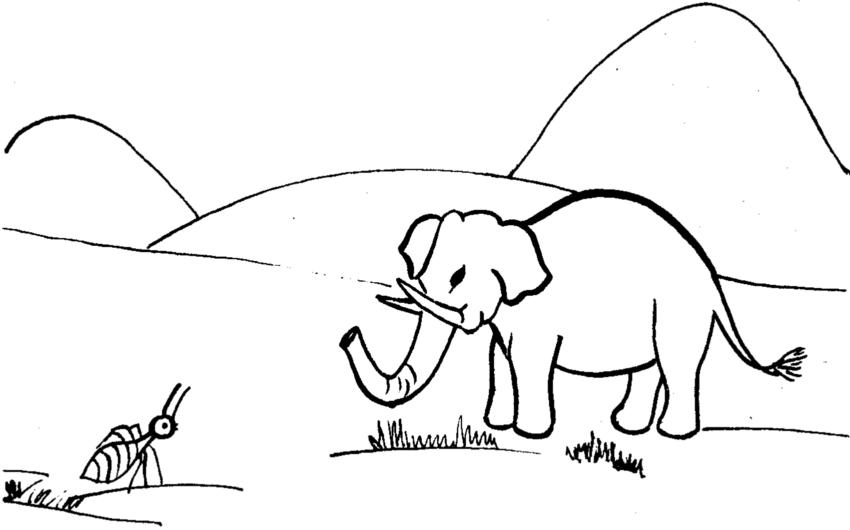
GỢI Ý :

Chọn sao cho ab = cd. Ví dụ : a = 1, b = 6, c = 2, d = 3; a = 2, b = 6, c = 3, d = 4.

(*) Số tự nhiên n được gọi là một số chính phương nếu nó là bình phương của một số tự nhiên. Ví dụ $9 = 3^2$; $36 = 6^2$, các số 9 và 36 là các số chính phương.

• *NGỤY BIỆN*

Kiến nặng bằng voi



Long đang ngồi học bài thì Tuấn chạy sang hỏi bạn :

– Này Long ơi, cậu có tin rằng kiến nặng bằng voi không ?

– Cậu nói chuyện hoang đường đấy à ?

– Đâu phải chuyện bịa đặt, tôi dùng toán học để chứng minh cho cậu xem nhé !

– Chứng minh xem nào !

– Thế này nhé : Gọi trọng lượng kiến là a (kg), trọng lượng voi là b (kg). Đặt $c = \dfrac{a+b}{2}$ *(1)*

$$(1) \Leftrightarrow \quad a = 2c - b \qquad (2)$$

$$\Leftrightarrow 2c - a = b \qquad (3)$$

Nhân vế với vế (2) và (3) ta được :

$$a(2c - a) = b(2c - b)$$

$$\Leftrightarrow 2ac - a^2 = 2bc - b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2ac = b^2 - 2bc \quad (4)$$

Cộng vào mỗi vế của (4) cùng đại lượng c^2 *ta được :*

$$a^2 - 2ac + c^2 = b^2 - 2bc + c^2$$

$$\Leftrightarrow (a - c)^2 = (b - c)^2$$

$$\Rightarrow a - c = b - c \quad \Rightarrow a = b$$

– Ừ sao thế nhỉ ???

Bài 21

Chứng minh rằng :

Nếu x, y ≠ 0 và $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2$ **thì** $\dfrac{a}{x} = \dfrac{b}{y}$

GIẢI

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 =$$

$$= a^2y^2 + b^2x^2 - 2abxy = (ay - bx)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ay - bx = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Bài 22

Cho x, y, m, n là các số nguyên thỏa mãn hệ thức

$$x + y = m + n$$

Chứng minh rằng $S = x^2 + y^2 + m^2 + n^2$ **là tổng các bình phương của ba số nguyên.**

Ví dụ : $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 = 2^2 + 4^2 + 8^2$;

$21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 1^2 + 2^2 + 45^2$.

GỢI Ý :

$$S = x^2 + y^2 + m^2 + n^2 + 2x(x + y - m - n)$$
$$= (x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2mx + m^2) + (x^2 - 2nx + n^2)$$

Bài 23

Chứng minh rằng :

a) Nếu n là tổng của hai số chính phương thì 2n cũng là tổng của hai số chính phương.

b) Nếu 2n là tổng của hai số chính phương thì n cũng là tổng của hai số chính phương.

c) Nếu n là tổng của hai số chính phương thì n^2 cũng là tổng của hai số chính phương.

GỢI Ý :

a) $n = a^2 + b^2$ $\quad 2n = (a - b)^2 + (a + b)^2$

b) $2n = p^2 + q^2$ suy ra p, q cùng chẵn hoặc cùng lẻ, suy ra $\frac{p+q}{2}$ và $\frac{p-q}{2}$ là các số nguyên. $n = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-q}{2}\right)^2$

c) $n = a^2 + b^2$ $\quad n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

Bài 24

a) Cho a = 11 ... 1 (có n chữ số 1), b = 100 ... 05 (có n − 1 chữ số 0). Chứng minh rằng ab + 1 là số chính phương.

b) Cho số u_n = 11... 155... 5 (Có n chữ số 1 và n chữ số 5). Chứng minh rằng $u_n + 1$ là một số chính phương.

GIẢI

a) Ta có :

$$9a + 1 = 9.(11\ldots1) + 1 = 10^n$$

$$b = 10^n + 5 = 9a + 6$$

$$ab + 1 = a(9a + 6) + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a+1)^2 \text{ (đpcm)}$$

b) Ta viết

$$u_n = \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số 1}}\underbrace{55\ldots5}_{\text{n chữ số 5}} = \underbrace{11\ldots1}_{\text{n chữ số 1}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{n chữ số 0}} + \underbrace{55\ldots5}_{\text{n chữ số 5}}$$

$$= 11\ldots1 \times 10^n + 5 \times 11\ldots1$$

Đặt $a = 11 \ldots 1$, theo câu a) ta có $9a + 1 = 10^n$.

Do đó $u_n = a(9a + 1) + 5a = 9a^2 + 6a$

$$u_n + 1 = 9a^2 + 6a + 1 = (3a + 1)^2 = (\underbrace{33\ldots3}_{\text{n−1 chữ số 3}}4)^2$$

2. Lập phương của một tổng, một hiệu; tổng, hiệu của hai lập phương

Dùng các chữ A, B để chỉ các biểu thức đại số ta có các hằng đẳng thức :

Lập phương của một tổng

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \qquad (4)$$

Lập phương của một hiệu

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3 \qquad (5)$$

Tổng của hai lập phương

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \qquad (6)$$

Hiệu của hai lập phương

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \qquad (7)$$

GHI CHÚ : Các hằng đẳng thức (4) và (5) đôi khi còn được viết dưới dạng :

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B) \quad (4a)$$

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B) \quad (5a)$$

Bài 25

Giải các phương trình :

a) $(x - 3)^3 - (x - 3)(x^2 + 3x + 9) + 6(x + 1)^2 = 15$;

b) $x(x - 5)(x + 5) - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) = 3$.

GỢI Ý :

a) Áp dụng các hằng đẳng thức (1), (5) và (7). *Đáp số :* $x = -\frac{5}{12}$

b) Áp dụng các hằng đẳng thức (3) và (6). *Đáp số :* $x = -\frac{11}{25}$

Bài 26

Cho a + b = S và ab = P. Hãy biểu diễn theo S và P các biểu thức sau đây :

a) $M = a^2 + b^2$ **b)** $N = a^3 + b^3$ **c)** $L = a^4 + b^4$

GIẢI

a) $M = (a + b)^2 - 2ab = S^2 - 2P$

b) $N = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = S^3 - 3PS$

c) $L = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = (S^2 - 2P)^2 - 2P^2$

$$= S^4 - 4S^2P + 2P^2 .$$

Bài 27

a) Tính giá trị của đa thức :

$$A = 2(x^3 + y^3) - 3(x^2 + y^2) \text{ với } x + y = 1$$

b) Biểu thức sau đây có phụ thuộc biến x không ?

$$B = (x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x + 1)(x - 1)$$

GỢI Ý :

a) Sử dụng các hằng đẳng thức (6) và (1). *Đáp số :* -1

b) Sử dụng các hằng đẳng thức (7) và (2). *Đáp số :* $B = 4$, không phụ thuộc x.

Bài 28

Chứng minh các đẳng thức

a) $(x + y + z)^3 - (x + y - z)^3 - (x + z - y)^3 - (y + z - x)^3 = 24xyz$.

b) $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3 = 3(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)(y^2 + z^2)$

GỢI Ý :

a) Nhận xét rằng

$$(A + B)^3 - (A - B)^3 = 2B^3 + 6A^2B.$$

$$(A + B)^3 + (A - B)^3 = 2A^3 + 6AB^2.$$

Viết vế trái dưới dạng :

$$\left[((y + z) + x)^3 - ((y + z) - x)^3\right] - \left[(x + (y-z))^3 + (x - (y - z))^3\right]$$

rồi sử dụng nhận xét trên

b) Nhận xét rằng : $y^2 + z^2 = (x^2+y^2) + (z^2-x^2)$ và áp dụng hằng đẳng thức

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

vào vế trái

3. Mở rộng, tổng quát hóa một vài hằng đẳng thức đáng nhớ

Bình phương một tổng của n hạng tử $(n \geq 2)$

Hằng đẳng thức sau đây là mở rộng của hằng đẳng thức (1) :

$$(A_1 + A_2 + ... + A_n)^2 = A_1^2 + A_2^2 + ... + A_n^2 + 2A_1A_2 + 2A_1A_3 + + ... + 2A_1A_n + 2A_2A_3 + 2A_2A_4 + + ... + 2A_2A_n + ... + 2A_{n-1}A_n \quad (8)$$

Hằng đẳng thức (8) có thể phát biểu như sau: Bình phương một tổng (n hạng tử) bằng tổng các bình phương của tất cả các hạng tử cộng với hai lần tích của mỗi hạng tử với các hạng tử đứng bên phải nó.

Ví dụ : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

Bài 29

Cho a, b, c là 3 số không đồng thời bằng không. Chứng minh rằng có ít nhất một trong các biểu thức sau đây có giá trị dương.

$$x = (a + b + c)^2 - 8ab$$
$$y = (a + b + c)^2 - 8bc$$
$$z = (a + b + c)^2 - 8ac$$

GIẢI

Ta có :

$x + y + z = 3(a + b + c)^2 - 8ab - 8bc - 8ac =$

$= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ac)$

$= a^2 + b^2 + c^2 + (a^2-2ab + b^2) + (b^2-2bc + c^2) + (a^2-2ac + c^2)$

$\Rightarrow x + y + z = a^2 + b^2 + c^2 + (a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2 \quad (1)$

Bởi vì a, b, c không đồng thời bằng không nên

$$a^2 + b^2 + c^2 > 0$$

Từ đẳng thức (1) suy ra $x + y + z > 0$. Tổng của ba hạng tử lớn hơn không thì ít nhất phải có một hạng tử dương.

Bài 30

a) Cho x, y, z khác không. Chứng minh rằng, nếu

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 \text{ thì } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

b) Cho $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Xác định giá trị của biểu thức $M = x^4 + y^4 + z^4$

GIẢI

a) $(ax + by + cz)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) =$

$$= 2abxy + 2acxz + 2bcyz - a^2y^2 - a^2z^2 - b^2x^2 - b^2z^2 - c^2x^2 - c^2y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (a^2z^2 - 2acxz + c^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ay - bx = 0 \\ az - cx = 0 \\ bz - cy = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

b) $M = x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$ (1)

$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = (xy + yz + zx)^2 - 2xyz(x + y + z)$ (2)

$xy + yz + zx = \frac{1}{2}\left[(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)\right]$ (3)

Thay $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ vào (1), (2), (3) ta có $M = \frac{1}{2}$

Bài 31

Chứng minh đẳng thức sau :

a) $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (c + a - b)^2 + (a + b - c)^2 =$

$= 4(a^2 + b^2 + c^2)$ **(1)**

b) $(a + b + c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3 - (a + b - c)^3 = 24abc$ **(2)**

GIẢI

a) *Cách 1* : Áp dụng công thức (8) cho mỗi hạng tử vế trái của đẳng thức (1) và rút gọn rồi so sánh hai vế.

Cách 2 : Viết vế trái của (1) dưới dạng :

$P = [(b + c) + a]^2 + [(b + c) - a]^2 + [a + (b-c)]^2 + [a - (b-c)]^2$

Nhận xét rằng : $(A + B)^2 + (A - B)^2 = 2(A^2 + B^2)$

ta có : $P = 2[(b + c)^2 + a^2] + 2[a^2 + (b - c)^2]$

$= 4a^2 + 2[(b + c)^2 + (b - c)^2] = 4a^2 + 2 . 2(b^2 + c^2)$, đpcm

b) Viết vế trái của (2) dưới dạng :

$Q = \{[(b+c) + a]^3 - [(b+c) - a]^3\} - \{[a + (b-c)]^3 + [a - (b-c)]^3\}$.

Nhận xét rằng :

$$(A + B)^3 - (A - B)^3 = 2B^3 + 6A^2B$$
$$(A + B)^3 + (A - B)^3 = 2A^3 + 6AB^2$$

ta có : $Q = \{2a^3 + 6a(b + c)^2\} - \{2a^3 + 6a(b - c)^2\}$

$= 6a[(b + c)^2 - (b - c)^2] = 24abc$, đpcm

Bài 32

Chứng minh các đẳng thức

a) $(ax + by + cz)^2 + (bx - ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$

$= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$ **(1)**

b) $(ab + bc + ca)^2 + (a^2 - bc)^2 + (b^2 - ca)^2 + (c^2 - ab)^2 =$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 \qquad (2)$$

GỢI Ý :

a) Áp dụng các hằng đẳng thức (8) và (2) cho vế trái của (1) và rút gọn. Thực hiện nhân các đa thức vế phải của (1) rồi so sánh kết quả.

b) Từ (1) suy ra (2) bằng cách đặt x = b, y = c, z = a.

• TỔNG, HIỆU HAI LŨY THỪA BẬC n

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

với mọi $n \in N$, $n \geq 2$ *(9)*

Trong đẳng thức (9) nếu n là số tự nhiên chẵn, dương, thay B bởi – B thì có :

$$A^{2k} - B^{2k} = (A + B)(A^{2k-1} - A^{2k-2}B + ... + AB^{2k-2} - B^{2k-1})$$

với mọi $k \in N$, $k \geq 1$ *(10)*

Khi k = 1 thì đẳng thức (10) trở thành đẳng thức (3).

Cũng trong đẳng thức (9) nếu n là một số tự nhiên lẻ lớn hơn 2, thay B bởi – B thì được :

$$A^{2k+1} + B^{2k+1} = (A + B)(A^{2k} - A^{2k-1}B + ... + A^2B^{2k-2} - AB^{2k-1} + B^{2k})$$

với $k \in N$, $k \geq 1$ *(11)*

Khi k = 1 thì (11) trở về (6).

Để chứng minh (10) và (11), chỉ cần thực hiện phép nhân ở vế phải rồi rút gọn.

• LŨY THỪA BẬC n CỦA MỘT NHỊ THỨC. TAM GIÁC PASCAL VÀ NHỊ THỨC NEWTON (NIUTƠN)

Khai triển $(A + B)^n$ *để viết dưới dạng một đa thức với lũy thừa giảm dần của A lần lượt với n = 0, 1, 2, 3, 4, 5... ta được :*

$(A + B)^0 = 1$

$(A + B)^1 = A + B$

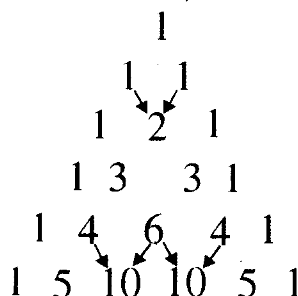
$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$

$(A + B)^4 = A^4 + 4A^3B + 6A^2B^2 + 4AB^3 + B^4$

$(A + B)^5 = A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$

Viết riêng các hệ số của các đa thức ở vế phải các đẳng thức trên thành bảng có dạng tam giác như sau :



Nhìn vào các số trong bảng, ta nhận thấy :

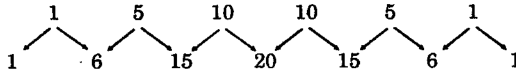
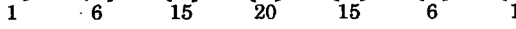
+ Mỗi dòng đều có số đầu và số cuối là 1.

+ Mỗi số của một dòng (không kể số đầu và số cuối) bằng tổng của hai số ở dòng liền trên, ngay bên trái và bên phải của nó.

Ví dụ : 2 = 1 + 1; 10 = 4 + 6 = 6 + 4 (theo các mũi tên).

Các quy tắc trên được chứng minh một cách tổng quát, theo đó khi biết các hệ số trong một dòng, ta xác định được các hệ số trong dòng kế tiếp. Ví dụ :

Các hệ số ở dòng thứ 5 là : 1 5 10 10 5 1

Các hệ số ở dòng thứ 6 là : 1 6 15 20 15 6 1

Nhờ đó ta viết được :

$$(A + B)^6 =$$
$$= A^6 + 6A^5B + 15A^4B^2 + 20A^3B^3 + 15A^2B^4 + 6AB^5 + B^6$$

Bảng các hệ số thành lập theo quy tắc trên gọi là tam giác Pascal, *mang tên nhà toán học Pháp B. Pascal (1623 - 1662). Nhờ tam giác Pascal ta viết được dễ dàng khai triển lũy thừa của một nhị thức. Tuy nhiên, để viết được công thức của $(A + B)^n$, ta phải lập tam giác Pascal với n dòng, điều này không thuận tiện khi n lớn.*

Nhà bác học Anh I. Newton (Niutơn, 1643–1727) đã nêu ra công thức tổng quát sau đây, được gọi là công thức nhị thức Newton, hay nhị thức Newton *:*

$$(A + B)^n = A^n + nA^{n-1}B + \frac{n(n-1)}{1.2}A^{n-2}B^2 +$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}A^{n-3}B^3 + ... + \frac{n(n-1)}{1.2}A^2B^{n-2} +$$
$$+ nAB^{n-1} + B^n \qquad (12)$$

Chú ý rằng các hệ số trong công thức nhị thức là đối xứng : hệ số của A^n và B^n bằng nhau (bằng 1), hệ số của $A^{n-1}B$ và AB^{n-1} bằng nhau (bằng n), hệ số của $A^{n-2}B^2$ và A^2B^{n-2} cùng bằng $\frac{n(n-1)}{1.2}$, v.v...

Ví dụ : $(A + B)^5 =$

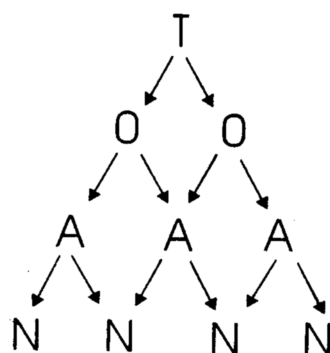
$$= A^5 + 5A^4B + \frac{5.4}{1.2}A^3B^2 + \frac{5.4}{1.2}A^2B^3 + 5AB^4 + B^5$$

$$= A^5 + 5A^4B + 10A^3B^2 + 10A^2B^3 + 5AB^4 + B^5 .$$

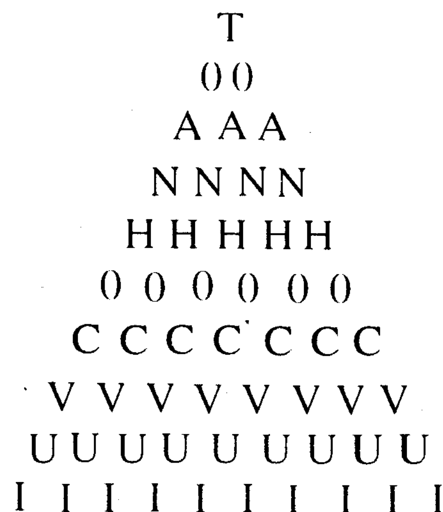
Bài 33

Có bao nhiêu cách đọc từ TOAN trong hình a) ? (Các chữ được đọc từ trên xuống, sau mỗi chữ thì đọc tiếp một trong hai chữ ở hàng ngay dưới, sát bên trái hoặc bên phải, như mũi tên trong hình vẽ).

Với cách đọc như trên thì có bao nhiêu cách đọc TOAN HOC VUI trong hình b) ?



a)



b)

GIẢI

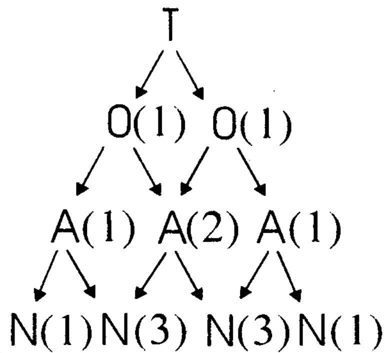
Coi mỗi cách đọc từ TOAN là một con đường đi từ T đến N, qua O và A, theo chiều các mũi tên như hình c).

Chỉ có một con đường từ T đến 0, ta ghi chú số 1 vào đó, được 0(1).

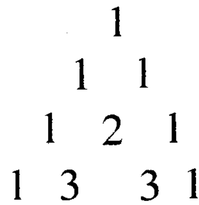
Xét ba chữ A ở dòng tiếp theo : chỉ có 1 con đường đi đến các chữ A ở phía ngoài, ta ghi chú số 1 vào đó, được A(1); có 2 con đường đi đến chữ A ở giữa (1 con đường từ chữ O bên trái, 1 con đường từ chữ O bên phải), ta ghi chú số 2 vào đó, được A(2).

Xét bốn chữ N ở dòng cuối : cũng chỉ có 1 con đường đi đến các chữ N ở phía ngoài, ta có N(1); với hai chữ N ở giữa, có 1 con đường từ A(1) đến và 1 con đường từ A(2) đến, mà có 2 con đường đi từ T đến A(2), do đó số con đường đi đến N ở giữa phải là $1 + 2 = 3$, ta được N(3).

Thay các chữ trên hình c) bằng các số tương ứng (chú ý rằng có thể thay T bằng 1) ta có hình d).



c)



d)

Số con đường đi từ T đến N là tổng các số ở dòng cuối của hình d), tức là có tất cả $1 + 3 + 3 + 1 = 8$ cách đọc từ TOAN.

Tương tự như vậy, đối với TOAN HOC VUI, ta lập được bảng số như hình e). Dễ thấy rằng d) và e) chính là các *tam giác Pascal.*

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

e)

Có tất cả 1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512 cách đọc TOANHOCVUI.

B. PASCAL



Blaise Pascal (1623-1662) là nhà Toán học, Vật lí học, Triết học, nhà văn người Pháp. Ngay từ nhỏ Pascal đã say mê tự học, khám phá. Năm 16 tuổi ông đã viết bản luận văn "Những thiết diện của hình nón" được đánh giá xuất sắc và sớm trở thành hội viên Hội Toán học, thành viên của Viện hàn Lâm khoa học Pháp sau này. Vĩnh biệt cuộc đời ở tuổi 39, Pascal đã để lại một số công trình trong lĩnh vực Toán học và Vật lí học như : định lí lớn Pascal

về đường cônic, nguyên lí quy nạp toán học, lí thuyết xác suất, áp suất khí quyển, sự cân bằng của chất lỏng ... ông còn để lại nhiều tác phẩm về Triết học, Văn học.

Trong cuộc sống gia đình, Pascal là người con, người em, rất hiếu thảo, tận tình. Pascal mồ côi mẹ từ khi mới 4 tuổi, cha ông là người cương trực bị nền chuyên chế Pháp săn đuổi phải lưu lạc ở nước ngoài mãi đến năm 1640 mới trở về Pháp. Khi về nước lại có chuyện làm phật ý vị chức sắc tôn giáo quyền uy nên buộc phải chuyển gia đình từ Paris về một thành phố nhỏ phía bắc nước Pháp, ở đó cha Pascal làm kế toán của sở tài chính. Suốt ngày này sang ngày khác và nhiều khi chiều tối lúc về nhà ông phải bù đầu với các con số cùng các phép tính cồng kềnh. Pascal rất thương cha. Ông thường giúp cha tính toán và từ công việc ấy, ông nảy ra ý định chế tạo máy tính để cha đỡ cực nhọc.

Năm 1642 sau mấy năm làm việc không mệt mỏi với nhiều phương án thiết kế khác nhau, chỉ với các vật liệu gỗ, đồng, xương, Pascal đã chế tạo chiếc máy tính đầu tiên của nhân loại có thể cộng, trừ nhân, chia được. Đó là món quà tặng cha, cũng là món quà của thiên tài Pascal hiến tặng cho cả nhân loại.

§3. PHÂN TÍCH ĐA THỨC THÀNH NHÂN TỬ

Phân tích một đa thức thành nhân tử là biến đổi đa thức thành một tích của nhiều đa thức khác. Nhờ vận dụng linh hoạt các tính chất giao hoán, kết hợp của các phép cộng và nhân và tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng các đa thức, ta có nhiều phương pháp phân tích một đa thức thành nhân tử.

1. Phương pháp đặt nhân tử chung

Bài 34

Phân tích thành nhân tử đa thức

$$A = p^{m+2}q - p^{m+1}q^3 - p^2q^{n+1} + pq^{n+3}$$

GIẢI

Đa thức A có thể viết lại dưới dạng :

$$A = pq \cdot p^{m+1} - pqp^mq^2 - pqpq^n + pq \cdot q^{n+2}$$

Các hạng tử của A đều có nhân tử chung là pq :

$$A = pq[p^{m+1} - p^mq^2 - pq^n + q^{n+2}]$$
$$= pq[(pp^m - p^mq^2) - (pq^n - q^nq^2)]$$
$$= pq[p^m(p - q^2) - q^n(p - q^2)]$$
$$= pq(p - q^2)(p^m - q^n)$$

Bài 35

Chứng minh rằng không thể có các số nguyên a, b, c, d nào thỏa mãn các đẳng thức :

abcd – a = 1961; abcd – b = 961

abcd – c = 61 ; abcd – d = 1

(Đề thi Olympic toán lớp 7 Mascova, vòng II, 1961)

GỢI Ý :

Chứng minh bằng phản chứng

GIẢI

Giả sử có các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các đẳng thức đã cho.

Phân tích vế trái của các đẳng thức đã cho thành nhân tử, ta có :

$$a(bcd - 1) = 1961 \quad (1)$$
$$b(acd - 1) = 961 \quad (2)$$

$$c(abd - 1) = 61 \qquad (3)$$
$$d(abc - 1) = 1 \qquad (4)$$

Vế phải của (1) là một số lẻ do đó phải là tích của hai số lẻ, suy ra a là một số lẻ. Tương tự, từ các đẳng thức (2) (3) và (4) ta suy ra b, c, d phải là các số lẻ.

Bốn số a, b, c, d lẻ nên tích abcd là số lẻ và hiệu abcd − a là một số chẵn. Điều này mâu thuẫn với giả thiết abcd − a = 1961 là một số lẽ. Vậy không thể có các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện đã ra.

2. Phương pháp dùng hằng đẳng thức

Bài 36

Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $25x^4 - 10x^2y + y^2$ b) $-16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4$

c) $8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3$ d) $25x^2 - 20xy + 4y^2$

GIẢI

a) $25x^4 - 10x^2y + y^2 = (5x^2)^2 - 2(5x^2)y + y^2 = (5x^2 - y)^2$

b) $-16a^4b^6 - 24a^5b^5 - 9a^6b^4 = -a^4b^4(16b^2 + 2 . (4b)(3a) + (3a)^2)$

$= -a^4b^4(4b + 3a)^2$

c) $8m^3 + 36m^2n + 54mn^2 + 27n^3 =$

$= (2m)^3 + 3(2m)^2 3n + 3(2m)(3n)^2 + (3n)^3 = (2m + 3n)^3.$

d) $25x^2 - 2oxy + 4y^2 = (5x)^2 - 2(5x)(2y) + (2y)^2 = (5x - 2y)^2.$

Bài 37

Phân tích đa thức thành nhân tử :

a) $4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$ b) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2$

c) $(a^2 + b^2 - 5)^2 - 4(ab + 2)^2$ d) $(4x^2 - 3x - 18)^2 - (4x^2 + 3x)^2$

GIẢI

a) $(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2) =$

$= [(b + c)^2 - a^2][a^2 - (b - c)^2]$

$= (b + c + a)(b + c - a)(a + b - c)(a - b + c)$

b) $(ax + by + ay + bx)(ax + by - ay - bx) =$

$= (a + b)(x + y)(a - b)(x - y).$

c) $(a^2 + b^2 - 5 + 2ab + 4)(a^2 + b^2 - 5 - 2ab - 4)$

$= [(a + b)^2 - 1][(a - b)^2 - 9]$

$= (a + b + 1)(a + b - 1)(a - b + 3)(a - b - 3).$

d) $(4x^2 - 3x - 18 + 4x^2 + 3x)(4x^2 - 3x - 18 - 4x^2 - 3x)$

$= (8x^2 - 18)(-6x - 18)$

$= [2(4x^2 - 9)][-6(x + 3)]$

$= -12(2x + 3)(2x - 3)(x + 3)$.

Bài 38

Phân tích thành nhân tử :

$$[4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)]^2 - 4[cd(a^2 + b^2) + ab(c^2 + d^2)]^2 .$$

(Đề thi vô địch toán lớp 7 vòng II, Belarussia, 1985)

GIẢI

Biểu thức có dạng : $A^2 - B^2$, trong đó

$A = 4abcd + (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$

$B = 2cd(a^2 + b^2) + 2ab(c^2 + d^2)$

Ta có :

$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$

$$A + B = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) + 2cd(a^2 + b^2) + 4abcd + 2ab(c^2 + d^2)$$
$$= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2 + 2cd) + 2ab(2cd + c^2 + d^2)$$
$$= (c + d)^2(a^2 + b^2 + 2ab)$$
$$= (c + d)^2(a + b)^2$$

Tương tự như vậy, ta phân tích được :

$$A - B = (c - d)^2(a - b)^2$$

Cuối cùng ta có :

$$A^2 - B^2 = (a + b)^2(a - b)^2(c + d)^2(c - d)^2 .$$

Bài 39

Phân tích thành nhân tử

a) $9(x + y - 1)^2 - 4(2x + 3y + 1)^2$ **b)** $-4x^2 + 12xy - 9y^2 + 25$

c) $x^2 - 2xy + y^2 - 4m^2 + 4mn - n^2$ **d)** $8x^3 + 64$

GỢI Ý :

a) $[3(x + y - 1)]^2 - [2(2x + 3y + 1)]^2$ áp dụng hằng đẳng thức (3)

b) $5^2 - (2x - 3y)^2$

c) $(x - y)^2 - (2m - n)^2$

d) $(2x)^3 + 4^3$ áp dụng hằng đẳng thức (6)

Bài 40

Chứng minh rằng :

a) Nếu m là một số nguyên thì $(2m + 1)^2 - 1$ chia hết cho 8 ;

b) Hiệu các bình phương của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 4;

c) Hiệu bình phương của hai số lẻ liên tiếp chia hết cho 8.

GIẢI

a) Ta có : $(2m + 1)^2 - 1 = (2m + 1 + 1)(2m + 1 - 1)$
$= 4m(m + 1)$

m và *m + 1* là hai số nguyên liên tiếp, nên chắc chắn phải có một số là số chẵn. Do vậy tích *m(m + 1)* chia hết cho 2.

Vậy : $4m(m + 1)$ phải chia hết cho 8.

b) Lấy một số chẵn là 2n thì số chẵn liền sau nó là 2n + 2.

Hiệu : $(2n + 2)^2 - (2n)^2 = 4(2n + 1)$, chia hết cho 4.

c) Lấy một số lẻ là 2n + 1 thì số lẻ liền trước nó là 2n − 1.

Ta xét hiệu :

$$(2n + 1)^2 - (2n-1)^2 = [(2n + 1) + (2n-1)][(2n + 1) - (2n-1)]$$
$$= 8n, \text{ chia hết cho } 8.$$

3. Phương pháp nhóm các hạng tử

Bài 41

Tìm tất cả các giá trị của x, y sao cho :

$$xy + 1 = x + y$$

GIẢI

$$xy + 1 - x - y = 0$$
$$\Leftrightarrow (xy - x) + (1 - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow x(y - 1) + (1 - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \text{ y tùy ý} \\ y = 1, \text{ x tùy ý} \end{array}\right.$$

Bài 42

Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - 2x - 4y^2 - 4y$ **b)** $x^4 + 2x^3 - 4x - 4$

c) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$

d) $3x^2 - 3y^2 - 2(x - y)^2$

e) $ac^2x - adx - bc^2x + cdx + bdx - c^3x$

g) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$

h) $x^2 - y^2 - 2x - 2y$

i) $a^5 - ax^4 + a^4x - x^5$

Đáp số :

a) $(x + 2y)(x - 2y - 2)$

b) $(x^2 - 2)(x^2 + 2x + 2)$

c) $(x - 1)(x + 1)(x + 2y)$

d) $(x - y)(x + 5y)$

e) $dx(-a + b + c) + c^2x(a - b - c) = x(b + c - a)(d - c^2)$

g) $(x - 3)(x - 4)(x + 3)$

h) $(x + y)(x - y - 2)$

i) $(a - x)(a^2 + x^2)(a + x)^2$

4. Phương pháp tách một số hạng tử thành tổng của nhiều hạng tử

Ta phân tích một hạng tử thành tổng của nhiều hạng tử thích hợp, để xuất hiện những nhóm số hạng mà ta có thể phân tích thành nhân tử bằng phương pháp dùng hằng đẳng thức, đặt nhân tử chung...

Bài 43

Phân tích thành nhân tử : $x^2 - 6x + 8$

GIẢI

Có thể chọn các hạng tử khác nhau để tách hạng tử đó một cách thích hợp

Cách 1 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 2x) - 4x + 8 = x(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x - 4)$$

Cách 2 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1 = (x - 3 + 1)(x - 3 - 1) = (x - 2)(x - 4)$$

Cách 3 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 4) - 6x + 12$$
$$= (x - 2)(x + 2) - 6(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x + 2 - 6)$$
$$= (x - 2)(x - 4)$$

Cách 4 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 16) - 6x + 24$$
$$= (x - 4)(x + 4) - 6(x - 4)$$
$$= (x - 4)(x + 4 - 6)$$
$$= (x - 4)(x - 2)$$

Cách 5 :

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 4x + 4) - 2x + 4$$
$$= (x - 2)^2 - 2(x - 2)$$
$$= (x - 2)(x - 2 - 2)$$
$$= (x - 2)(x - 4)$$

Bài 44

Phân tích thành nhân tử :

a) $x^2 - 7xy + 10y^2$; **b)** $a^2 - 5a - 14$

GỢI Ý :

a) Tách : $7xy = 2xy + 5xy$. Kết quả : $(x - 2y)(x - 5y)$

b) Tách : $5a = -2a + 7a$. Kết quả : $(a + 2)(a - 7)$

Bài 45

Phân tích thành nhân tử :

a) $2m^2 + 10m + 8$; **c)** $x^3 - 5x^2 - 14x$;

b) $4p^2 - 36p + 56$; **d)** $x^2yz + 5xyz - 14yz$

GỢI Ý :

a) Tách $10m = 4m + 6m$. Kết quả : $2(m + 1)(m + 4)$

b) Biểu diễn : $36p = 16p + 20p$. Kết quả : $4(p - 2)(p - 7)$

c) Kết quả : $x(x + 2)(x - 7)$

d) Biểu diễn $5xyz = -4xyz + 9xyz$. Kết quả : $yz(x - 2)(x + 7)$

Bài 46

Phân tích thành nhân tử :

a) $a^4 + a^2 + 1$;

b) $a^4 + a^2 - 2$;

c) $x^4 + 4x^2 - 5$;

d) $x^3 - 19x - 30$;

e) $x^3 - 7x - 6$.

GỢI Ý :

a) $a^4 + a^2 + 1 = (a^4 + 2a^2 + 1) - a^2$.

b) $(a^4 - 1) + (a^2 - 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 2)$.

c) $(x^4 + 4x^2 + 4) - 9 = (x^2 + 5)(x - 1)(x + 1)$

d) $(x^3 - 9x) - (10x + 30) = (x + 3)(x + 2)(x - 5)$.

e) $(x^3 - x) - (6x + 6) = (x - 3)(x + 1)(x + 2)$.

5. Phương pháp thêm bớt cùng một hạng tử

Ta thêm hay bớt cùng một hạng tử vào đa thức đã cho để làm xuất hiện những nhóm số hạng mà ta có thể phân tích được thành thừa số bằng các phương pháp : đặt nhân tử chung, dùng hằng đẳng thức...

Bài 47

Phân tích thành nhân tử :

a) $a^4 + 64$;

b) $a^4 + 4b^4$.

GIẢI

a) $a^4 + 64 = (a^2)^2 + 8^2 + 2 . 8a^2 - 2 . 8a^2$

$= (a^2 + 8)^2 - (4a)^2$

$= (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a)$

$= (a^2 + 4a + 8)(a^2 - 4a + 8)$

b) $a^4 + 4b^4 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2(a^2)(2b^2) - 2(a^2)(2b^2)$

$= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$

$= (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$

Bài 48

Phân tích thành nhân tử

a) $x^2 - x - 12$ **d)** $x^2 + 7x + 12$

b) $x^2 + 8x + 15$ **e)** $x^2 + 6x + 8$

c) $x^4 - x^2 - 12$ **g)** $x^5 - x^4 - 1$

Đáp số :

a) $(x + 3)(x - 4)$ b) $(x + 3)(x + 5)$

c) $(x^2 + 3)(x - 2)(x + 2)$ d) $(x + 3)(x + 4)$

e) $(x + 2)(x + 4)$ g) $(x^3 - x - 1)(x^2 - x + 1)$

Chú thích

Người ta chứng minh được rằng kết quả trong các phân tích trên đây là những đa thức không thể phân tích thành tích của những đa thức với hệ số là các số hữu tỉ có bậc nhỏ hơn nữa.

Nói riêng, tam thức bậc hai $ax^2 + bx + c$ không phân tích được thành nhân tử (là nhị thức bậc nhất) nếu $\Delta = b^2 - 4ac$ là số âm hoặc không phải là bình phương của một số hữu tỉ.

Ví dụ :

$x^2 + x + 1 (a = b = c = 1)$ không phân tích được thành nhân tử vì $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$; đối với $2x^2 + 3x - 1$ cũng vậy, vì $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2+4 . 2 = 17$ không phải là bình phương của một số hữu tỉ

6. Phương pháp đặt biến phụ

Bài 49

Phân tích thành nhân tử :

$$(x^2 + y^2) + 4x^2 + 4x - 12 .$$

GIẢI

$$A = (x^2 + x)^2 + 4x^2 + 4x - 12$$
$$= (x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12$$

Đặt $y = x^2 + x$, ta được :

$$A = y^2 + 4y - 12 = y^2 + 4y + 4 - 16$$
$$= (y + 2)^2 - 4^2 = (y + 2 + 4)(y + 2 - 4)$$
$$= (y + 6)(y - 2)$$
$$= (x^2 + x + 6)(x - 1)(x + 2) .$$

Bài 50

Phân tích thành nhân tử:

a) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$;

b) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

c) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24$.

GỢI Ý :

a) Đặt $x^2 + 4x + 8 = y$

$y^2 + 3xy + 2x^2 = (y^2 + 2xy + x^2) + (xy + x^2)$

Kết quả : $(x^2 + 5x + 8)(x + 2)(x + 4)$

b) Đặt $x^2 + x + 1 = y$.

$y(x + 1) - 12 = (y - 3)(y + 4)$

c) Để ý rằng : 1 + 4 = 2 + 3, ta nhóm các nhân tử trong tích như sau :

$[(x+1)(x+4)][(x+2)(x+3)] = (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

Đặt $x^2+5x+4 = y$

Kết quả : $x(x+5)(x^2+5x+10)$

7. Phân tích thành nhân tử bằng cách phối hợp nhiều phương pháp

Bài 51

Phân tích thành nhân tử

a) $(x^2+y^2-5)^2-4(xy+2)^2$

b) $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$

c) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24$.

GỢI Ý :

a) Áp dụng hằng đẳng thức (3) và (2).

Đáp số : $(x+y-1)(x+y+1)(x-y-3)(x-y+3)$

b) Dùng biến phụ $Y = x^2+8x+7$.

Đáp số : $(x^2+8x+10)(x^2+8x+12)$

c) Viết $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)-24 = [(x+2)(x+5)][(x+3)(x+4)]-24$ rồi dùng biến phụ $x^2+7x+10 = Y$.

Đáp số : $(x^2+7x+16)(x+1)(x+6)$

Bài 52

Phân tích thành nhân tử

a) $x^3+x^2z+y^2z-xyz+y^3$

b) $bc(b+c)+ca(c-a)-ab(a+b)$

c) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

GỢI Ý :

a) $x^3 + y^3 + z(x^2 + y^2 - xy) = (x + y + z)(x^2 + y^2 - xy)$

b) Tách $c - a = c + b - b - a$. *Đáp số :* $(a + b)(b + c)(c - a)$

c) Tách $c - a = c - b + b - a$. *Đáp số :* $(b - c)(a - b)(a - c)$

Bài 53

Nhân tích thành nhân tử

a) $P = a^6 - a^4 + 2a^3 + 2a^2$

b) $Q = x^9 - x^7 - x^6 - x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1$

GỢI Ý :

a) $P = a^2(a^4 - a^2 + 2a + 2) = a^2[a^2(a^2 - 1) + 2(a + 1)]$

Đáp số : $P = a^2(a + 1)(a^3 - a^2 + 2)$

b) $Q = (x^9 - x^7) - (x^6 - x^4) - (x^5 - x^3) + x^2 - 1$

$= (x^2 - 1)(x^7 - x^4 - x^3 + 1) = (x - 1)^3(x + 1)^2(x^2 + 1)(x^2 + x + 1).$

Bài 54

Phân tích thành nhân tử :

$$(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

(Đề thi vô địch toán lớp 8, vòng 1 Belarussia 1952)

GIẢI

$$A = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$
$$= [(x + y + z)^3 - x^3] - (y^3 + z^3)$$

Áp dụng các hằng đẳng thức (6) và (7)

$$A = (x + y + z - x)[(x + y + z)^2 + (x + y + z)x + x^2] -$$
$$- (y + z)(y^2 - yz + z^2)$$

$$= (y + z)[x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + xy + xz + x^2 + x^2 - y^2 + yz - z^2]$$

$$= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz)$$

$$= 3(y + z)[x(x + y) + z(x + y)] = 3(x + y)(y + z)(x + z)$$

Bài 55

Phân tích thành nhân tử :

$$(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 - (c + a - b)^3$$

GỢI Ý :

Đặt : $a + b - c = z$

$b + c - a = y$

$c + a - b = z$

$\Rightarrow x + y + z = a + b + c$

Ta đưa bài toán về bài toán vừa giải ở trên

Đáp số : 6abc

Bài 56

Phân tích thành nhân tử :

$$(b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$$

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II, Miền Bắc, 1962)

GỢI Ý :

Đặt : $x = b - c$, $y = c - a$, $z = a - b$

Ta có : $\begin{cases} x + y = b - a \\ x + z = a - c \\ y + z = c - b \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0$

Ta đưa về bài toán để giải

Đáp số : $3(a - b)(a - c)(c - b)$

Bài 57

Phân tích thành nhân tử :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

(Đề thi vào lớp 10 chuyên toán trường Lê Hồng Phong, TP.HCM, 1988)

GIẢI

Cách 1 :

Áp dụng các hằng đẳng thức :

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Ta được :

$$\begin{aligned} M &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \\ &= (x + y)^3 + z^3 - 3xyz - 3x^2y - 3xy^2 \\ &= (x + y + z)[(x + y)^2 - (x + y)z + z^2] - 3xy(x + y + z) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \end{aligned}$$

Cách 2 :

$$(x + y + z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + \\ + 3xz(x + y + z) + 3yx(x + y + z) - 3xyz$$

Từ đây ta có :

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)^3 - (x + y + z)(3xy + 3yz + 3xz) \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz). \end{aligned}$$

Bài 58

Phân tích thành nhân tử :

$$(x + y)^5 - x^5 - y^5$$

GIẢI

Khai triển $(x + y)^5$ theo nhị thức Newton (công thức (12), §4) ta có :

$$A = (x + y)^5 - x^5 - y^5$$
$$= 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4$$
$$= 5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$$

Mà : $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$2x^2y + 2xy^2 = 2xy(x + y)$

Do đó : $A = 5xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)$

Bài 59

Phân tích thành nhân tử :

$$A = (x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3$$

(Đề thi vô địch toán lớp 8, vòng I, Belarussia 1957)

GIẢI

Cách 1 :

Biến đổi $(x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3$ theo công thức tổng của hai lập phương, ta được :

$$(y^2 + z^2)[(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(z^2 - x^2) + (z^2 - x^2)^2]$$

Thay vào A, ta có : $A = (y^2 + z^2)B$

Trong đó :

$$B = [(x^2 + y^2)^2 - (x^2 + y^2)(z^2 - x^2)] + [(z^2 - x^2)^2 - (y^2 + z^2)^2]$$
$$= [(x^2 + y^2)(2x^2 + y^2 - z^2)] + [(2z^2 - x^2 + y^2)(-x^2 - y^2)]$$
$$= (x^2 + y^2)(3x^2 - 3z^2)$$

Vậy : $A = 3(y^2 + z^2)(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)$

Cách 2 :

Thay $(y^2 + z^2)^3 = [(x^2 + y^2) + (z^2 - x^2)]^3$ vào A, ta có :

$$A = -3(x^2 + y^2)^2(z^2 - x^2) - 3(x^2 + y^2)(z^2 - x^2)^2$$
$$= 3(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - x^2)$$
$$= 3(x^2 + y^2)(x^2 - z^2)(y^2 + z^2)$$

Bài 60

Phân tích thành thừa số :

$$A = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2a^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4 .$$

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của tam giác thì A > 0

(Đề thi vào chuyên toán Miền Bắc, 1979)

GỢI Ý :

Thêm bớt các hạng tử thích hợp và nhóm các hạng tử :

$$A = 4a^2b^2 - (a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + (2b^2c^2 + 2a^2c^2) - c^4 .$$
$$= (2ab)^2 - [(a^2 + b^2)^2 - 2c^2(a^2 + b^2) + c^4]$$
$$= (2ab)^2 - [(a^2 + b^2) - c^2]^2$$
$$= (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$
$$= (a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)$$

Nếu a, b, c là các cạnh của tam giác thì $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và các nhân tử của biểu thức trên đều dương (theo các bất đẳng thức về các cạnh trong tam giác) nên $A > 0$.

§4. CHIA ĐA THỨC

1. Chia đơn thức cho đơn thức, chia đa thức cho đơn thức

a) Đơn thức A chia hết cho đơn thức B ≠ 0 nếu và chỉ nếu mỗi biến số có trong B đều có trong A với số mũ mỗi biến trong B không lớn hơn số mũ của biến tương ứng trong A.

Ví dụ : $9x^2y^4z$ chia hết cho $12xy^3$

$18xy^2z^2$ không chia hết cho $6y^3z$.

b) Để tìm thương của đơn thức A chia cho đơn thức B

– Ta chia hệ số của A cho hệ số của B

– Chia mỗi lũy thừa của biến trong A cho lũy thừa cùng biến đó trong B.

– Nhân các kết quả.

Ví dụ : $9x^2y^4z : 12xy^3 = \frac{9}{12}x^{2-1}y^{4-3}z^{1-0} = \frac{3}{4}xyz$

c) Nếu mỗi đơn thức hạng tử của đa thức A chia hết cho đơn thức B ≠ 0 thì đi tìm thương Q = A : B, ta chia mỗi hạng tử của A cho B rồi cộng các kết quả lại.

Ví dụ : $[3x^5y^2 + 4x^3y^3 - 5x^2y^4] : 2x^2y^2 = \frac{3}{2}x^3 + 2xy - \frac{5}{2}y^2$.

Bài 61

Thực hiện các phép tính

a) $(2x^3y)(3xy^2) : 2x^3y^3$ **b)** $\frac{(3a^2b)^3(ab^3)^2}{(a^2b^2)^4}$

c) $\frac{(2xy^2)^3(3x^2y)^2}{(2x^3y^2)^2}$

Đáp số : a) 3x b) 27b c) $18xy^4$

Bài 62

Thực hiện phép tính

a) $\left(\frac{3}{5}a^6x^3 + \frac{3}{7}a^3x^4 - \frac{9}{10}ax^5\right) : \frac{3}{5}ax^3$

b) $(9x^2y^3 - 15x^4y^4) : 3x^2y - (2-3x^2y)y^2$

Đáp số : a) $a^5 + \frac{5}{7}a^2x - \frac{3}{2}x^2$ b) $y^2 - 2x^2y^3$

Bài 63

Thực hiện phép tính

a) $(6x^2 - xy) : x + (2x^3y + 3xy^2) : xy - (2x-1)x$

b) $(x^2 - xy) : x + (6x^2y^5 - 9x^3y^4 + 15x^4y^3) : \frac{3}{2}x^2y^3$

Đáp số : a) $7x + 2y$ b) $10x^2 + x - 6xy - y + 4y^2$

2. Chia đa thức cho đa thức

Định lí : cho hai đa thức một biến f và g (với $g \neq 0$) bao giờ cũng tồn tại duy nhất một cặp đa thức q và r sao cho

$$f = gq + r$$

trong đó bậc của r nhỏ hơn bậc của g.

Nếu $r = 0$ ta bảo f chia hết cho g, kí hiệu $f \vdots g$

Khi thực hiện phép chia ta cần sắp đa thức chia và bị chia theo lũy thừa giảm dần của biến rồi đặt phép tính như phép chia các số.

Ta có thể chia các đa thức của nhiều biến bằng cách chọn một biến làm chính và sắp theo lũy thừa giảm dần của biến chính, các biến còn lại coi như hằng số và đặt phép tính để thực hiện phép chia.

Bài 64

Thực hiện phép tính chia để tìm thương và dư

a) $f = 4x^3 - 3x^2 + 1$ chia cho $g = x^2 + 2x - 1$

b) $(2 - 4x + 3x^4 + 7x^2 - 5x^3) : (1 + x^2 - x)$

GIẢI

a)

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 3x^2 + 1 & x^2 + 2x - 1 \\ \underline{-\ 4x^3 + 8x^2 - 4x} & \overline{4x - 11} \\ -11x^2 + 4x + 1 & \\ \underline{-\ \ -11x^2 - 22x + 11} & \\ 26x - 10 & \end{array}$$

Kết luận : Đa thức thương : $4x - 11$, đa thức dư : $26x - 10$

b) Trước hết sắp các đa thức bị chia và đa thức chia theo lũy thừa giảm dần rồi đặt phép tính.

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 2 & x^2 - x + 1 \\ \underline{-\ 3x^4 - 3x^3 + 3x^2} & \overline{3x^2 - 2x + 2} \\ -2x^3 + 4x^2 - 4x + 2 & \\ \underline{-\ \ -2x^3 + 2x^2 - 2x} & \\ 2x^2 - 2x + 2 & \\ \underline{-\ \ 2x^2 - 2x + 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Đa thức $3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 4x + 2$ chia hết cho đa thức $x^2 - x + 1$

Đa thức thương : $3x^2 - 2x + 2$

Bài 65

Chia các đa thức

a) $f = 4x^5 + 3xy^4 - y^5 + 2x^4y - 6x^3y^2$, $g = 2x^3 + y^3 - 2xy^2$

b) $f = 2a^3 + 7ab^2 - 7a^2b - 2b^3$, $g = 2a - b$

GIẢI

a) Chọn biến x làm chính, sắp đa thức bị chia và chia theo lũy thừa giảm dần của biến x và đặt phép tính như sau :

$$\begin{array}{r|l}
4x^5 + 2x^4y - 6x^3y^2 + 3xy^4 - y^5 & 2x^3 - 2xy^2 + y^3 \\
-\ (4x^5 - 4x^3y^2 + 2x^2y^3) & \overline{2x^2 + xy - y^2} \\
\hline
2x^4y - 2x^3y^2 - 2x^2y^3 + 3xy^4 - y^5 & \\
-\ (2x^4y - 2x^2y^3 + xy^4) & \\
\hline
-2x^3y^2 + 2xy^4 - y^5 & \\
-\ (-2x^3y^2 + 2xy^4 - y^5) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

b) Chọn a làm biến chính

$$\begin{array}{r|l}
2a^3 - 7a^2b + 7ab^2 - 2b^3 & 2a - b \\
-\ (2a^3 - a^2b) & \overline{a^2 - 3ab + 2b^2} \\
\hline
-6a^2b + 7ab^2 - 2b^3 & \\
-\ (-6a^2b + 3ab^2) & \\
\hline
4ab^2 - 2b^3 & \\
-\ (4ab^2 - 2b^3) & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Bài 66

Thực hiện phép chia để tìm đa thức thương và dư :

a) $19x^2 - 11x^3 + 9 - 20x + 2x^4$ **chia cho** $1 + x^2 - 4x$

b) $3x^4y - x^5 - 3x^3y^2 + x^2y^3 - x^2y^2 + 2xy^3 - y^4$ **chia cho** $x^3 - x^2y + y^2$

Đáp số : a) Thương $2x^2 - 3x + 5$ dư : $3x + 4$.

b) Thương $-x^2 + 2xy - y^2$, chia hết.

Bài 67

Thực hiện các phép tính

a) $(2x + 4y)^2 : (x + 2y) - (9x^3 - 12x^2 - 3x) : (-3x) - (x^2 + 3)3$.

b) $(13x^2y^2 - 5x^4 + 6y^4 - 13x^3y - 13xy^3) : (2y^2 - x^2 - 3xy)$

Đáp số : a) $8y - 10$ b) $3y^2 - 2xy + 5x^2$

• TÌM ĐA THỨC THƯƠNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỒNG NHẤT HỆ SỐ (HỆ SỐ BẤT ĐỊNH)

Ta dựa vào mệnh đề sau đây :

Nếu hai đa thức P(x) và Q(x) bằng nhau :

$$P(x) = Q(x)$$

thì các hạng tử cùng bậc ở hai đa thức phải có hệ số bằng nhau.

Ví dụ : $P(x) = ax^2 + 2bx - 3$

$Q(x) = x^2 - 4x - p$

Nếu $P(x) = Q(x)$

thì ta có : $a = 1$ *(hệ số của lũy thừa 2)*

$2b = -4$ *(hệ số của lũy thừa 1)*

$-3 = -p$ *(hạng tử không đổi)*

Tức là : $a = 1,\ b = -2,\ p = 3$

Bài 68

Cho biết đa thức $3x^3 - 7x^2 + 4x - 4$ chia hết cho nhị thức $x - 2$. Tìm đa thức thương.

GIẢI

Gọi đa thức bị chia là f(x), đa thức chia là g(x).

Ở đây f(x) là đa thức bậc ba, còn g(x) là đa thức bậc nhất, vì vậy thương phải là đa thức bậc hai, nghĩa là thương có dạng :

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Ta có :

$$3x^3 - 7x^2 + 4x - 4 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$$
$$= ax^3 + (b - 2a)x^2 + (c - 2b)x - 2c .$$

Đồng nhất hệ số ở hạng tử cùng bậc ở hai vế, ta được :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b - 2a = -7 \\ c - 2b = 4 \\ -2c = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

Đa thức phải tìm là $h(x) = 3x^2 - x + 2$.

Chú ý : Ta có thể nhận xét về hệ số cao nhất và hạng tử không đổi của f(x), g(x) và h(x), để có ngay: $a = 3$, $(-2c) = -4$. Do đó $c = 2$.

Bài 69

Phân tích đa thức : $P(x) = x^4 - x^3 - 2x - 4$ thành nhân tử, biết rằng một nhân tử có dạng :

$$x^2 + dx + 2 .$$

GỢI Ý :

$$x^4 - x^3 - 2x - 4 = (x^2 + dx + 2)(ax^2 + bx + c)$$

Nhận xét :

– Về hệ số cao nhất : $ax^2x^2 = x^4 \Rightarrow a = 1$.

– Về hệ số không đổi : $c.2 = -4 \Rightarrow c = -2$

$$x^4 - x^3 - 2x - 4 = (x^2 + dx + 2)(x^2 + bx - 2)$$

Tìm ra $b = 0$, $d = -1$

Bài 70

Với giá trị nào của a và b thì đa thức :

$$x^3 + ax^2 + 2x + b$$

chia hết cho đa thức : $x^2 + x + 1$.

Hãy giải bài toán bằng hai cách khác nhau.

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II toàn quốc, 1976)

GIẢI

Cách 1 :

Chia f(x) cho $x^2 + x + 1$.

Ta được dư là $(2 - a)x + (b + 1 - a) = r(x)$.

Ta có phép chia hết khi và chỉ khi $r(x) = 0$

Tức là $\begin{cases} 2 - a = 0 \\ b + 1 - a = 0 \end{cases}$ suy ra $a = 2$ và $b = 1$

Cách 2 :

Chú ý rằng f(x) bậc 3, còn đa thức chia là bậc 2, nên thương phải là một nhị thức bậc nhất, có dạng $x + k$. Từ đó :

$$(x + k)(x^2 + x + 1) = x^3 + ax^2 + 2x + b$$

$$(x + k)(x^2 + x + 1) = x^3 + (k + 1)x^2 + (k + 1)x + k$$

$$\Leftrightarrow x^3 + ax^2 + 2x + b = x^3 + (k + 1)x^2 + (k + 1)x + k$$

Hệ số của các hạng tử cùng bậc phải bằng nhau, suy ra :

$$a = k + 1$$
$$2 = k + 1$$
$$b = k$$

Từ đây ta có : $k = 1$, $a = 2$, $b = 1$.

• ĐỊNH LÍ BÉZOUT (BÊZU) VÀ ỨNG DỤNG

Định lí Bézout

Dư trong phép chia đa thức f(x) cho nhị thức x − a bằng f(a) (giá trị của f(x) tại x = a) :

$$f(x) = (x - a)\,q(x) + f(a).$$

(Bézout, 1730 − 1783, nhà toán học Pháp)

Hệ quả : *Nếu a là nghiệm của đa thức f(x) thì f(x) chia hết cho x−a.*

Áp dụng : Định lí Bézout có thể dùng để phân tích một đa thức thành nhân tử. Thực hiện như sau :

Bước 1. *Chọn một giá trị x = a nào đó và thử xem x = a có phải là nghiệm của f(x) không.*

Bước 2. *Nếu f(a) = 0, theo định lí Bézout ta có :*

$$f(x) = (x - a)p(x)$$

Để tìm p(x) thực hiện phép chia f(x) cho x − a

Bước 3. *Tiếp tục phân tích p(x) thành nhân tử nếu còn phân tích được. Sau đó viết kết quả cuối cùng cho hợp lí.*

Bài 71

Phân tích thành nhân tử đa thức sau đây :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

GIẢI

Ta thử vận dụng định lí Bézout.

Bước 1. Thử $x = 2$ ta thấy : $f(2) = 2^3 - 2^2 - 28 + 24 = 0$

Vậy 2 là một nghiệm của f(x). Theo hệ quả của định lí Bézout thì f(x) chia hết cho $x - 2$.

$$f(x) = (x - 2)p(x)$$

Bước 2. Thực hiện phép chia f(x) cho $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 14x + 24 & x - 2 \\ -\ \ x^3 - 2x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 + x - 12} \\ \hline x^2 - 14x \qquad \\ -\ \ x^2 - 2x \qquad \\ \hline -12x + 24 \\ -\ \ -12x + 24 \\ \hline 0 \qquad \end{array}$$

Vậy : $f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 12)$

Bước 3. $p(x) = x^2 + x - 12$ có $p(3) = 0$ tức là $x = 3$ là nghiệm của p(x). Vậy p(x) chia hết cho $x - 3$.

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x - 12 & x - 3 \\ -\ \ x^2 - 3x \qquad & \overline{x + 4} \\ \hline 4x - 12 \\ -\ \ 4x - 12 \\ \hline 0 \qquad \end{array}$$

$$p(x) = (x - 3)(x + 4)$$

Vậy $f(x) = (x - 2)(x - 3)(x + 4)$

Nhận xét :

Phương pháp phân tích đa thức thành nhân tử nhờ vào định lí Bézout chỉ áp dụng được khi ta đã biết được một nghiệm của f(x). Thường thì việc xác định

nghiệm của f(x) không dễ dàng. Đối với những đa thức f(x), tương đối đơn giản, người ta dự đoán một số giá trị của x để xem có phải là nghiệm của f(x) không. Trong Đại số học có một định lí giúp chúng ta định hướng và hạn chế được số giá trị x cần lựa chọn; định lí ấy, phát biểu trong điều kiện cụ thể của ta như sau:

"*Cho đa thức với các hệ số nguyên :*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$$

Nếu f(x) có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước số của hạng tử độc lập a_o"

Do vậy, ta tìm các nghiệm nguyên của f(x) chỉ trong tập các ước số của a_o mà thôi.

Ở đây ta có hai trường hợp đặc biệt :

– Nếu tổng các hệ số $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0 = 0$ thì đa thức sẽ có nghiệm x = 1, nghĩa là nó chia hết cho x − 1.

– Nếu tổng các hệ số của các số hạng bậc lẻ bằng tổng các hệ số của các số hạng bậc chẵn thì đa thức có nghiệm x = −1, nghĩa là nó chia hết cho x + 1.

Trong bài tập 71 ta chỉ cần thử xem các giá trị ±1, ±2. ±3, ±4, ±6, ±12, ±24 có phải là nghiệm của f(x) không. Bằng cách thử dần từ số nhỏ đến số lớn ta có được f(2) = f(3) = f(−4) = 0.

Vậy f(x) chia hết cho (x − 2), (x − 3), (x + 4).

Bài 72

Phân tích thành nhân tử :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 3$$

GỢI Ý :

Hạng tử độc lập 3 có các ước số ±1, ±3. Ta chỉ thử trong bốn số ±1, ±3 mà thôi.

f(+1) = 12, f(−1) = 2, f(3) = 78, f(−3) = 0

Vậy f(x) chia hết cho x + 3.

Chia f(x) cho x + 3 :

$$(x^3 + 4x^2 + 4x + 3) : (x + 3) = x^2 + x + 1$$

Vậy $x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x^2 + x + 1)$

Bài 73

Phân tích thành nhân tử :

a) $x^3 - 7x - 6$; **b)** $x^3 - 19x - 30$;

c) $a^3 - 6a^2 + 11a - 6$.

GỢI Ý :

a) *Cách 1* :

Sử dụng phương pháp tách một hạng tử :

$$x^3 - 7x - 6 = (x^3 - x) - (6x + 6)$$

Cách 2 :

Áp dụng định lí Bézout :

Đặt $f(x) = x^3 - 7x - 6$. Vì -1 là một ước số của 6, ta tính $f(-1) = 0$.

Vậy f(x) chia hết cho (x + 1). Ta có : $f(x) = (x + 1)(x^2 - x - 6)$.

Ta thấy $x = -2$ là nghiệm của $x^2 - x - 6$, ta suy ra được :

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3) .$$

Kết quả : $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x - 3)$.

b) *Cách 1* :

$$x^3 - 19x - 30 = (x^3 - 9x) - (10x + 30)$$
$$= x(x^2 - 9) - 10(x + 3) .$$

Cách 2 :

Áp dụng định lí Bézout :

Đặt $f(x) = x^3 - 19x - 30$. Xét một ước số của 30, ta được $f(-2) = 0$.

Ta chia cho (x + 2).

$$f(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 15) .$$

$x^2 - 2x - 15$ nhận $x = 5$ làm nghiệm. Do vậy :

$$f(x) = (x + 2)(x + 3)(x - 5).$$

c) $a^3 - 6a^2 + 11a - 6 = (a - 3)(a - 2)(a - 1)$

Bài 74

Phân tích thành nhân tử :

$$P = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 .$$

GIẢI

Trong bài 54, ta đã giải bài toán bằng cách áp dụng hằng đẳng thức. Sau đây là một cách giải khác, dùng định lí Bézout.

Coi P là một đa thức đối với x, ta thấy $P = 0$ khi $x = -y$, chứng tỏ P chia hết cho $x + y$. Vì trong P, vai trò của x, y, z là như nhau, nên P cũng chia hết cho $y + z$ và $z + x$, nghĩa là P chia hết cho tích :

$$(x + y)(y + z)(z + x).$$

Vì P là đa thức bậc hai đối với x (khi bỏ dấu ngoặc thì số hạng chứa x^3 không còn), nên P phải có dạng :

$$P = k(x + y)(y + z)(z + x)$$

Cho (x; y; z) một giá trị cụ thể ta tìm được k.

Ví dụ :

Với $x = y = 1$, $z = 0$

thì $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = (1 + 1)^3 - 1^3 - 1^3 = 6$

$k(x + y)(y + z)(z + x) = k(1 + 1)(1 + 0)(1 + 0) = 2k$

Do đó $2k = 6 \Rightarrow k = 3$.

Vậy : $P = 3(x + y)(y + z)(z + x)$.

Bài 75

Phân tích thành nhân tử :

$$P = a(b + c)(b^2 - c^2) + b(c + a)(c^2 - a^2) + c(a + b)(a^2 - b^2) .$$

GIẢI

Coi P là một đa thức bậc 3 đối với a.

Cho $a = b$, có thể thấy rằng $P = 0$, vậy P chia hết cho $a - b$. Do a, b, c, có vai trò như nhau, nên P chia hết cho cả $b - c$, $c - a$. Ta có :

$$P = (a - b)(b - c)(c - a)Q$$

trong đó Q là bậc nhất đối với a. Vì vai trò a, b, c như nhau, nên Q cũng là bậc nhất đối với b, c; và trong Q hệ số của a, b, c phải bằng nhau, nghĩa là ta có :

$$Q = A(a + b + c)$$

Do đó : $P = A(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

Để xác định A, ta thay chẳng hạn $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ và được : $-6 = -6A$ hay $A = 1$

Vậy : $P = (a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$.

Bài 76

Xác định giá trị k để đa thức :

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k$$

chia hết cho đa thức : $g(x) = x^2 - x - 2$

GIẢI (vắn tắt)

Cách 1

Lấy f(x) chia cho g(x) để tìm số dư và đặt số dư bằng 0 để tìm k.

Ta có :

$x^4 - 9x^3 + 21x^2 + x + k = (x^2 - x - 2)(x^2 - 8x + 15) + k + 30$

f(x) chia hết cho g(x) thì cần và đủ là :

$$r(x) = k + 30 = 0 \Rightarrow k = -30.$$

Cách 2

Ta có : $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$

Như vậy nếu f(x) chia hết cho $x^2 - x - 2$, thì cũng chia hết cho $(x - 2)(x + 1)$. Áp dụng định lí Bézout và định nghĩa phép chia hết, ta thay $x = -1$ vào f(x) :

$$f(-1) = 1 + 9 + 21 - 1 + k = 0 \Rightarrow k = -30$$

Chú ý :

Có thể tính f(2) để có cùng kết quả

Bài 77

Tìm tất cả các số tự nhiên k để cho đa thức :

$$f(k) = k^3 + 2k^2 + 15$$

chia hết cho nhị thức : g(k) = k + 3.

GỢI Ý :

Cách 1

Hãy viết $k^3 + 2k^2 + 15 = (k + 3)(k^2 - k + 3) + 6$

Để f(k) chia hết cho k + 3 thì cần và đủ là 6 chia hết cho k + 3. Nếu k là số tự nhiên thì $k + 3 \geq 3$, vì thế 6 chia hết cho k + 3 khi và chỉ khi k = 0 hoặc k = 3.

Cách 2

Áp dụng định lí Bézout, chia f(k) cho g(k) = k − (−3) ta tìm được số dư.

$$f(-3) = -27 + 18 + 15 = 6$$

Số dư này phải chia hết cho k + 3.

Bài 78

Với giá trị nào của a và b thì đa thức :

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$$

chia hết cho đa thức : $g(x) = x^2 - 3x + 4$

(Đề thi vào chuyên toán Hà Nội, 1979)

GỢI Ý :

Chia f(x) cho g(x) ta được thương là $x^2 - 1$ và dư là $(a - 3)x + b + 4$, $f(x) \vdots g(x)$ khi và chỉ khi dư bằng 0.

Từ đây suy ra : $a - 3 = 0 \Rightarrow a = 3$

$b + 4 = 0 \Rightarrow b = -4$

Bài 79

Phân tích thành nhân tử đa thức

$f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$ với a, b, c là ba số khác nhau.

GIẢI

Ta có : $f(a) = a^3 - (a + b + c)a^2 + (ab + ac + bc)a - abc = 0$

Theo định lí Bézout $f(x) \vdots (x - a)$. Tương tự ta thấy $f(b) = 0$ $f(c) = 0$, do đó $f(x) \vdots (x - b)$ và $f(x) \vdots (x - c)$. Do a, b, c là ba số khác nhau nên f(x) chia hết cho tích $(x - a)(x - b)(x - c)$ và

$$f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$$
$$= (x - a)(x - b)(x - c)q(x)$$

Đa thức f(x) bậc ba, đa thức chia $(x - a)(x - b)(x - c)$ bậc ba cho nên thương q(x) là hằng số k.

$$f(x) = x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc$$
$$= k(x - a)(x - b)(x - c)$$

Cho $x = 0$ ta được : $f(0) = -abc = -kabc \Rightarrow k = 1$

Vậy $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc =$

$= (x - a)(x - b)(x - c)$

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

Bài 80

Các biểu thức sau đây có phụ thuộc x không ?

a) $A = (x-2)^2 - (x-3)(x-1)$;

b) $B = (x+1)(x^2-x+1) - (x-1)(x^2+x+1)$;

c) $C = (x-1)^3 - (x+1)^3 + 6(x+1)(x-1)$;

d) $D = (x+3)^2 - (x-3)^2 - 12x$.

GỢI Ý :

Áp dụng các hằng đẳng thức để khai triển các biểu thức, ta được :

a) $A = -2x + 7$ phụ thuộc x. b) $B = 2$: không phụ thuộc x.

c) $C = -8$: không phụ thuộc x. d) $D = 0$: không phụ thuộc x.

Bài 81

Giải các phương trình :

a) $x^3 - 16x = 0$; **b)** $2x^3 - 50x = 0$;

c) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$; **d)** $5x^2 - 4(x^2 - 2x + 1) - 5 = 0$.

GỢI Ý :

Phân tích vế trái thành tích các nhân tử. Tích bằng 0 khi và chỉ khi một trong các nhân tử bằng 0.

Đáp số : a) $x = 0; \pm 4$ b) $x = 0; \pm 5$
c) $x = \pm 3; 4$ d) $x = 1; -9$

Bài 82

Giải các phương trình :

a) $(x^2 - 9)^2 - (x-3)^2 = 0$; **b)** $x^3 - 3x + 2 = 0$;

c) $(2x-3)(x+1) + (4x^3 - 6x^2 - 6x) : (-2x) = 18$.

GỢI Ý :

a) $(x^2 - 9)^2 - (x - 3)^2 = 0$;

$(x - 3)^2(x + 2)(x + 4) = 0$

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$;

$(x - 1)^2(x + 2) = 0$

c) *Đáp số* : $x = 9$

Bài 83

Chia các đa thức :

a) $(3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5) : (3x^2 - 2x + 1)$;

b) $(2x^3 - 9x^2 + 19x - 15) : (x^2 - 3x + 5)$;

c) $(15x^4 - x^3 - x^2 + 41x - 70) : (3x^2 - 2x + 7)$;

d) $(6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5) : (3x^3 - 2xy^2 + y^3)$.

GIẢI

a) *Cách 1 :*

Chia thông thường

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5 & 3x^2 - 2x + 1 \\ \hline -\ 3x^4 - 2x^3 + x^2 & x^2 - 2x - 5 \\ \hline -6x^3 - 11x^2 + 8x - 5 & \\ -\ -6x^3 + 4x^2 - 2x & \\ \hline -15x^2 + 10x - 5 & \\ -\ -15x^2 + 10x - 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Cách 2 :

Dùng phương pháp *hệ số bất định. Giả sử ta có phép chia hết.*

– Ta nhận thấy rằng, hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của đa thức bị chia và của đa thức chia là bằng nhau (bằng 3). Vậy hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của thương phải là 1. Tương tự như vậy, hạng tử không đổi của thương phải là –5 (–5.1 = –5). Mặt khác, đa thức bị chia có bậc là 4, đa thức chia có bậc là 2. Vậy đa thức thương có bậc là 2. Do vậy đa thức thương phải có dạng :

$$x^2 + ax - 5$$

Ta có :

$$3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5 = (3x^2 - 2x + 1)(x^2 + ax - 5) \quad (*)$$

Khai triển vế phải bằng phép nhân các đa thức, ta có :

$$3x^4 - 8x^3 - 10x^2 + 8x - 5 =$$
$$= 3x^4 + (3a - 2)x^3 + (-15 - 2a + 1)x^2 + (a + 10)x - 5$$

Hệ số của các hạng tử cùng bậc ở hai vế phải bằng nhau, ta suy ra :

$$3a - 2 = -8$$
$$-15 - 2a + 1 = -10$$
$$a + 10 = 8$$

Cả ba đẳng thức đều cho $a = -2$.

Vậy đa thức thương là : $x^2 - 2x - 5$.

b) *Cách 1* :

Chia thông thường (các bạn tự giải).

Cách 2 :

Sử dụng phương pháp đồng nhất các hệ số (phương pháp hệ số bất định). Giả sử đây là phép chia hết.

Ta thấy ngay thương phải là một nhị thức bậc nhất mà hệ số của x là 2, *hạng tử không đổi là –3*.

Đó là $2x - 3$.

Kiểm tra lại, ta thấy đúng là :

$$(2x^3 - 9x^2 + 19x - 15) = (x^2 - 3x + 5)(2x - 3).$$

c) *Đáp số :* $5x^2 + 3x - 10$.

d) *Cách 1 :*

Ta nhận thấy :

– Đa thức bị chia bậc 5, đa thức chia bậc 3. Vậy đa thức thương phải là bậc 2.

– Hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của x trong đa thức bị chia là 6, trong đa thức chia là 3. Vậy hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của x trong thương là 2.

Tương tự, hệ số của hạng tử có bậc cao nhất của y trong thương là 2.

Vậy thương phải có dạng : $2x^2 + axy + 2y^2$.

Ta có : $(6x^5 - 3x^4y + 2x^3y^2 + 4x^2y^3 - 5xy^4 + 2y^5) =$

$$= (3x^3 - 2xy^2 + y^3)(2x^2 + axy + 2y^2) \quad (**)$$

Đồng nhất các hệ số của các hạng tử cùng bậc ở hai vế sau khi khai triển, ta có : $a = -1$.

Vậy thương là : $2x^2 - xy + 2y^2$.

Cách 2 :

Chia thông thường

Chú ý : Trong câu a), từ đẳng thức (*), chỉ còn phải xác định hệ số a. Thay vì khai triển vế phải của (*) và đồng nhất hệ số ở hai vế, ta có thể tìm hệ số a nhanh hơn bằng cách cho x *một giá trị đặc biệt.* Cho x = 1, từ (*) có

$$1 - 8 - 10 + 8 - 5 = (3 - 2 + 1)(1 + a - 5)$$

và có $a = -2$.

Tương tự như vậy, trong câu d), cho x, y *một giá trị đặc biệt* trong đẳng thức (**), ví dụ x = 1, y = 1, ta có

$$6 - 3 + 2 + 4 - 5 + 2 = (3 - 2 + 1)(2 + a + 2)$$

từ đó có $a = -1$.

Bạn đọc có thể thấy dễ dàng cách chọn thích hợp giá trị đặc biệt của ẩn trong từng trường hợp cụ thể.

Bài 84

Chứng minh rằng :

a) $a^2 + 2a + b^2 + 1 \geq 0$ với mọi giá trị của a và b

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 4 > 0$ với mọi giá trị của x, y.

GỢI Ý :

Chứng minh vế trái là tổng những số không âm :

a) $a^2 + 2a + b^2 + 1 = a^2 + 2a + 1 + b^2 = (a + 1)^2 + b^2$

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 4 = x^2 + 2xy + y^2 + 4 = (x + y)^2 + 4$

Bài 85

a) Tìm x để biểu thức sau có giá trị nhỏ nhất : $x^2 + x + 1$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P(x) = 2 + x - x^2$

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức :

1) $x^2 - 4x + 1$; 2) $4x^2 + 4x + 11$;

3) $3x^2 - 6x + 1$; 4) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6$.

d) Chứng minh rằng : $P(x) = (x - 3)(x - 5) + 2$ luôn luôn dương với mọi giá trị của x.

GỢI Ý :

a) $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{3}{4}$ khi $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, tức $x = -\frac{1}{2}$

b) *Đáp số :* $\frac{5}{4}$ khi $x = \frac{1}{2}$

c) 1) -3 khi $x = 2$

2) 10 khi $x = -\frac{1}{2}$

3) -2 khi $x = 1$

4) $x^2 - 2x + y^2 - 4y + 6 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + 1$

d) Viết $(x-3)(x-5) + 2 = (x-4)^2 + 1$

Bài 86

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$A = h(h+1)(h+2)(h+3)$$

GỢI Ý :

$$h(h+1)(h+2)(h+3) = h(h+3)(h+2)(h+1)$$
$$= (h^2 + 3h)(h^2 + 3h + 2)$$

Đặt $h^2 + 3h = x$

$$A = x(x+2) = x^2 + 2x = x^2 + 2x + 1 - 1$$
$$= (x+1)^2 - 1 \geq -1$$

Giá trị nhỏ nhất của A là -1.

Bài 87

a) Phân tích đa thức P(x) thành nhân tử :

$$P(x) = 3x^2 - 27x + 54$$

Với giá trị nào của x thì P(x) nhận giá trị không âm ?

b) Tìm m và p sao cho biểu thức :

$$A = m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28$$

đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị ấy.

GIẢI

a) $P(x) = 3x^2 - 27x + 54$

$= 3(x^2 - 9x + 18)$

$= 3(x^2 - 3x - 6x + 18)$

$= 3[(x^2 - 3x) - (6x - 18)]$

$= 3[x(x - 3) - 6(x - 3)]$

$= 3(x - 3)(x - 6)$

$P(x) \geq 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 6) \geq 0$

Lập bảng xét dấu của $(x - 3)(x - 6)$:

x		3		6	
x−3	−	0	+		+
x−6	−		−	0	+
(x−3)(x−6)	+	0	−	0	+

Vậy $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$ hoặc $x \geq 6$

b) Ta biến đổi A về dạng :

$A = m^2 - 4mp + 5p^2 + 10m - 22p + 28$

$= m^2 - 4mp + 4p^2 + 10m - 20p + p^2 - 2p + 1 + 27$

$= (m - 2p)^2 + 10(m - 2p) + (p - 1)^2 + 25 + 2$

$= (m - 2p)^2 + 10(m - 2p) + 5^2 + (p - 1)^2 + 2$

$A = (m - 2p + 5)^2 + (p - 1)^2 + 2 \geq 2$

A đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases} p - 1 = 0 \\ m - 2p + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow p = 1 \text{ và } m = -3$$

Bài 88

Phân tích các biểu thức sau thành nhân tử :

a) $m^3 - 6m^2 + 11m - 6$; **b)** $x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 6x + 1$;

c) $n^8 + n^4 + 1$.

GỢI Ý :

a) $m^3 - 3m^2 - 3m^2 + 9m + 2m - 6 = m^2(m-3) - 3m(m-3) + 2(m-3)$

$= (m-1)(m-2)(m-3)$

b) $x^4 + 3x^3 + 3x^3 + 9x^2 - x^2 - x^2 - 3x - 3x + 1$

Nhóm các hạng tử một cách thích hợp để có kết quả :

$$(x^2 + 3x - 1)^2$$

c) Thêm và bớt n^4 vào biểu thức và nhóm các hạng tử một cách thích hợp

Kết quả : $(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)(n^4 - n^2 + 1)$

Bài 89

Phân tích thành nhân tử :

a) $A = bc(a + d)(b - c) - ac(b + d)(a - c) + ab(c + d)(a - b)$

(Đề thi học sinh giỏi cấp II Miền Bắc, 1969);

b) $B = (z - x)y^3 - (z - y)x^3 + (x - y)z^3$

GIẢI (vắn tắt)

a) Khai triển biểu thức, giản ước các hạng tử đồng dạng đưa A về dạng :

$$A = d[a^2(b - c) - b^2(a - c) + c^2(a - b)] \quad (1)$$

Ta nhận thấy : $(b - c) = (a - c) - (a - b)$ (2)

Đem thay (2) vào (1) ta có kết quả :

$$A = d(a - c)(a - b)(b - c)$$

Chú ý : Có thể thay (2) vào ngay biểu thức ban đầu của A rồi mới khai triển và nhóm các hạng tử một cách thích hợp.

b) Ta nhận xét : $z - y = (z - x) + (x - y)$

Thay vào B :

$$\begin{aligned} B &= (z-x)y^3 - [(z-x)+(x-y)]x^3 + (x-y)z^3 \\ &= (z-x)y^3 - (z-x)x^3 - (x-y)x^3 + (x-y)z^3 \\ &= (z-x)(y^3 - x^3) + (x-y)(z^3 - x^3). \end{aligned}$$

Có thể dùng hệ quả của *định lí Bézout*:

Dễ thấy rằng $B = 0$ với $x = z$, $z = y$, $y = x$ và $x = -(y + z)$, do đó ta viết được :

$$B = k(x - z)(z - y)(y - x)(x + y + z)$$

Cho $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$, được $k = 1$.

Bài 90

Phân tích thành nhân tử :

$$P(x, y, z) = xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$$

GỢI Ý :

Cách 1 :

Với chú ý là $(y - z) = -[(x - y) + (z - x)]$

ta thay vào biểu thức của P (x, y, z) và giải như hai bài trên.

Kết quả : $P(x, y, z) = (x - y)(y - z)(x - z)$

Cách 2 :

Ta nhận thấy nếu thay x bởi y thì : $P(x, y, z) = 0$

có nghĩa là $x = y$ là một nghiệm của đa thức. Theo hệ quả của định lí Bézout thì : $P(x, y, z)$ chia hết cho $(x - y)$

Mặt khác vai trò của x, y, z là như nhau trong biểu thức của P(x, y, z). Do vậy, ta suy rằng P(x, y, z) chia hết cho $(x - y)(y - z)(z - x)$. Trong trường hợp này, đa thức bị chia P(x, y, z) và đa thức chia $(x - y)(y - x)(z - x)$ đều có bậc là 3 nên thương phải là một hằng số k. Ta có :

$$xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x) = k(x - y)(y - z)(z - x)$$

Cho $x = 2$, $y = 1$, $z = 0$ ta được :

$$2.1.1 + 0 + 0 = k.1.1.(-2)$$

$$k = -1$$

$$P(x, y, z) = -1(x - y)(y - z)(z - x)$$

$$= (x - y)(y - z)(x - z)$$

Bài 91

Cho biết : $a + b + c = 0$. Chứng minh rằng :

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$$

GỢI Ý :

$$a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow a = -(b + c)$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 2bc$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$$

Cộng $a^4 + b^4 + c^4$ vào hai vế của đẳng thức cuối này.

Bài 92

Chứng minh đẳng thức :

$$[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]^2 = 2[(x-y)^4 + (y - z)^4 + (z - x)^4]$$

GỢI Ý :

Dùng các hằng đẳng thức hoặc xem bài 91.

Bài 93

a) Chứng minh rằng từ đẳng thức :

$$(x-y)^2 + (y - z)^2 + (z-x)^2 = (x + y-2z)^2 + (y + z-2x)^2 + (z + x-2y)^2$$

ta suy ra $x = y = z$;

b) Chứng minh rằng nếu :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac \text{ thì } a = b = c.$$

GỢI Ý :

a) Áp dụng hằng đẳng thức về bình phương đa thức, ta đưa vế phải về :

$$3[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2].$$

Từ đây suy ra : $(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$.

Điều này xảy ra khi và chỉ khi : $x - y = y - z = z - x = 0$ tức $x = y = z$

b) Theo giả thiết : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$

Ta có : $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$

Suy ra : $(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (a^2 - 2ac + c^2) = 0$

$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 = 0$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi $a - b = b - c = a - c = 0$ tức là : $a = b = c$

Bài 94

Chứng minh rằng nếu $a + b + c = 0$ **(1)**

thì $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; **(2)**

Đảo lại, nếu có (2) thì có (1) không ?

GỢI Ý :

Sử dụng kết quả bài 57 ta được :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Do đó, nếu có (1) thì có $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$, tức (2)

Đảo lại, khi có (2) thì ta có : $a + b + c = 0$ (1)

hoặc : $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$ (3)

Theo bài 93 thì từ (3) ta có : $a = b = c$ (4)

Vậy : nếu có (2) thì suy ra $a + b + c = 0$ hoặc $a = b = c$.

nghĩa là : $\left[\begin{array}{l}(2) \Rightarrow (1) \\ (2) \Rightarrow (4)\end{array}\right.$

Bài 95

Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn :

$$x + y = xy$$

GIẢI

$$x + y = xy \Leftrightarrow x + y + 1 = xy + 1$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(y - 1) = 1 \qquad (1)$$

Vì $x, y \in Z$ nên $x - 1 \in Z$ và $y - 1 \in Z$.

Trong Z, ta có (1) khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 2; y = 2)$$

hoặc : $$\begin{cases} x - 1 = -1 \\ y - 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow (x = 0; y = 0)$$

Bài 96

a) x, y, z liên hệ với nhau bởi các đẳng thức :

$$x^2 - y = a; \quad y^2 - z = b; \quad z^2 - x = c.$$

Tính giá trị của biểu thức :

$$P = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1);$$

b) Cho $x + y = a; x^2 + y^2 = b, x^3 + y^3 = c$

Chứng minh rằng $a^3 - 3ab + 2c = 0$

GỢI Ý :

a) Biến P thành nhân tử : $P = (x^2 - y)(z^2 - x)(y^2 - z) \Rightarrow P = abc$

b) Ta có :

$$A = a^3 - 3ab + 2c = (x + y)^3 - 3(x + y)(x^2 + y^2) + 2(x^3 + y^3)$$

Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ, đặt nhân tử chung và rút gọn ta đưa biểu thức về dạng :

$$A = (x + y).0 = 0$$

Bài 97

a) Hãy sắp xếp lại các đơn thức trong các ô vuông của hình a), sao cho tích các đơn thức trên mỗi hàng, mỗi cột hay mỗi đường chéo luôn bằng nhau.

1	ab	a^2b
a	a^2	ab^2
b	b^2	a^2b^2

a)

1	−2	−3
4	6	9
−12	−18	36

b)

b) Hãy sắp xếp lại các số trong các ô vuông của hình b), sao cho tích các số trên mỗi hàng, mỗi cột, hay mỗi đường chéo luôn bằng nhau.

GỢI Ý :

a) Chú ý rằng tích của tất cả các đơn thức bằng a^9b^9, do đó tích của các đơn thức trên mỗi dòng, cột hay đường chéo phải bằng a^3b^3. Tại ô chính giữa của bảng (ô chung cho hàng thứ hai, cột thứ hai và hai đường chéo), phải đặt đơn thức ab. Suy ra lời giải.

b) Trường hợp đặc biệt của a), khi $a = -2$, $b = -3$.

Bài 98

Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số thỏa mãn hệ thức :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

thì hai trong ba số đó phải là hai số đối nhau.

GIẢI

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{1}{a+b+c}$$

$\Rightarrow (bc + ca + ab)(a + b + c) = abc$

$\Rightarrow (bc + ca + ab)(a + b + c) - abc = 0$

$\Rightarrow (a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$\Rightarrow a + b = 0\ (a = -b)$ hoặc $b + c = 0\ (b = -c)$

hoặc $c + a = 0\ (c = -a)$

Bài 99

Tìm tất cả các giá trị của x, y, z thỏa mãn đẳng thức

$$(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$$

(Thi vô địch toán lớp 8, Mascova 1985)

GỢI Ý :

Đưa về $y^2 - xy + xz - yz = 0 \Leftrightarrow (y - x)(y - z) = 0$

Đáp số : $y = x$; z tùy ý hoặc $y = z$; x tùy ý

Bài 100

a) Xác định các giá trị của a, b và c để đa thức

$P(x) = x^4 + ax^2 + bx + c$ chia hết cho $(x - 3)^3$;

b) Xác định các giá trị a, b sao cho đa thức

$$Q(x) = 6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2$$

chia hết cho đa thức $M(x) = x^2 - x + b$;

c) Xác định a, b để $P(x) = x^3 + 5x^2 - 8x + a$

chia hết cho $M(x) = x^2 + x + b$.

GỢI Ý :

a) Chia P(x) cho $(x - 3)^3$ ta được thương là $x - 9$

và dư là $R(x) = (a + 54)x^2 + (b - 216)x + 243 + c$

$P(x) \vdots (x-3)^3 \Leftrightarrow R(x) \equiv 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 54 = 0 \\ b - 216 = 0 \\ c + 243 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -54 \\ b = 216 \\ c = -243 \end{cases}$$

b) Chia Q(x) cho M(x) ta được :

Thương $6x^2 - x + (a - 6b - 1)$

Dư $(a - 5b + 2)x + (-ab + 6b^2 + b + 2)$

Từ điều kiện $Q(x) \vdots M(x)$ suy ra $a - 5b + 2 = 0$ (1)

$-ab + 6b^2 + b + 2 = 0$ (2)

Tính a từ (1) (theo b), thay vào (2)

$$b^2 + 3b + 2 = 0 \Rightarrow (b + 1)(b + 2) = 0$$

cho ta : $b = -1; a = -7$ hoặc $b = -2; a = -12$

Bài 101

Hãy xác định các số a, b, c để có đẳng thức :

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x - a)(x - b)(x - c).$$

GỢI Ý :

Hãy khai triển vế phải và đồng nhất hệ số của các hạng tử cùng bậc.

Kết quả : $c = 0; b = 0$, a tùy ý hoặc $b = -1, c = 1, a = -1$

Bài 102

Chứng minh rằng biểu thức :

$$A = (m + 1)(m + 3)(m + 5)(m + 7) + 1$$

chia hết cho biểu thức (m + 6)

GỢI Ý :

Phân tích biểu thức trên thành tích để làm xuất hiện nhân tử (m + 6)

Kết quả : $A = (m + 2)(m + 6)(m^2 + 8m + 10)$

Bài 103

Chứng minh biểu thức :

$$A = x^2 - z^2 + y(2x + y)$$

chia hết cho tổng (x + y + z).

GỢI Ý :

Phân tích thành nhân tử $A = (x + y + z)(x + y - z)$

Bài 104

Chứng minh rằng đa thức

$$A = x^{95} + x^{94} + x^{93} + ... + x^2 + x + 1$$

chia hết cho đa thức $B = x^{31} + x^{30} + x^{29} + ... + x^2 + x + 1$

GỢI Ý :

Phân tích A thành tích :

$$A = (x^{31} + x^{30} + ... + x^2 + x + 1)(x^{64} + x^{32} + 1) .$$

Bài 105

Giả sử x, y, z là các số nguyên dương, đôi một khác nhau, chứng minh rằng :

Biểu thức $A = (x - y)^5 + (y - z)^5 + (z - x)^5$

chia hết cho $B = 5(x - y)(y - z)(z - x)$.

GỢI Ý :

Đặt $x - y = a$, $y - z = b$, $z - z = c$

Ta nhận thấy $a + b + c = 0$

$$A = a^5 + b^5 + c^5$$

$$B = 5abc$$

Phân tích A thành nhân tử, với điều kiện $a + b + c = 0$ tức là $-(a + b) = c$

$$A = a^5 + b^5 + c^5 = a^5 + b^5 - (a + b)^5$$
$$= -5ab(a + b)(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(xem bài 58)}$$
$$A = 5abc(a^2 + ab + b^2) \quad \text{(do } a + b = -c\text{)}$$

Vậy $A \vdots B$

• PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN VỀ CHIA HẾT TRONG TẬP HỢP Z CÁC SỐ NGUYÊN

Ta biết rằng (xem cuối §3) : phép cộng và phép nhân các số nguyên có những tính chất cơ bản tương tự phép cộng và phép nhân các đa thức; ta có vành các số nguyên và vành các đa thức. Do mối liên hệ bản chất đó, việc giải nhiều bài toán chia hết trong tập hợp Z các số nguyên gắn liền với các phép toán cộng và nhân các đa thức (đặc biệt là phân tích đa thức thành nhân tử).

I. NHẮC LẠI MỘT SỐ KIẾN THỨC Ở LỚP 6 VÀ 7 VỀ LÍ THUYẾT CHIA TRONG Z

1. Tính chia hết

a) Định nghĩa

Cho $a, b \in Z$ $\quad (b \neq 0)$

Nếu có $q \in Z$ *sao cho* $a = bq$ *thì ta nói :*

a là bội *của b hoặc b là* ước *của a*

a chia hết cho b *hoặc b* chia hết a

Kí hiệu : $\quad a \vdots b \qquad\qquad b \mid a$

$$a \vdots b \ (b \mid a) \Leftrightarrow_{dn} a = bq$$

b) Tính chất cơ bản của quan hệ "chia hết" trong Z

Với mọi $a, b, c, m, n \in Z$:

1) $a \mid 0 \qquad (a \neq 0)$

2) $1 \mid a$

3) $a \mid a \qquad (a \neq 0)$

4) $a \mid b$ và $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$ $(a, b \neq 0)$

5) $a \mid b$ và $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ $(a, b \neq 0)$

(tính chất bắc cầu)

6) $c \mid a$ và $c \mid b \Rightarrow c \mid (am + bn)$ $(c \neq 0)$

2. Phép chia có dư

a) Định lí

Cho hai số nguyên a, b (b > 0), bao giờ cũng có duy nhất cặp số nguyên q, r sao cho :

$$a = bq + r \text{ với } 0 \leq r < b.$$

r là số dư *trong phép chia a cho b.*

($r = 0$: a chia hết cho b)

Khi $r \neq 0$, có thể lấy số dư là số âm $r' = r - b$.

b) Chia a cho b > 0 thì số dư r là một trong b số :

b chẵn $\Rightarrow r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots + \frac{b}{2}$

hoặc $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, -\frac{b}{2}$ *hoặc* $r = 0, 1, 2, \ldots, b - 1$

b lẻ $\Rightarrow r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \frac{b-1}{2}$

hoặc $r = 0, 1, 2, \ldots, b - 1$

Ví dụ :

– *Chia a cho 4 thì số dư là* một trong 4 số :

$r = 0, \pm 1, +2$ (*hoặc* $0, \pm 1, -2$; *hoặc* $0, 1, 2, 3$)

Chia a cho 5 thì số dư là một trong 5 số :

$r = 0, \pm 1, \pm 2$ (*hoặc* $r = 0, 1, 2, 3, 4$).

3. Thuật toán Euclid để tìm ƯCLN của hai số

Ước chung lớn nhất của hai số dương a và b được kí hiệu là *ƯCLN (a, b) hoặc (a, b).*

Bội chung nhỏ nhất *của a và b được kí hiệu là BCN (a, b) hay [a, b]*

Ở lớp 6, ta đã biết cách tìm ƯCLN (a,b) bằng cách phân tích a, b ra thừa số nguyên tố. Thuật toán Euclid *giúp ta tìm ƯCLN một cách khác. Thuật toán dựa trên định lí sau đây :*

1) Nếu a là bội của b thì ƯCLN (a, b) = b

$$a = bq \Rightarrow (a, b) = b$$

2) Nếu a chia cho b, dư r ≠ 0, thì ƯCLN (a, b) bằng ƯCLN (b, r)

$$a = bq + r \ (r \neq 0) \Rightarrow (a, b) = (b, \ r)$$

Do đó, ta có thể thực hiện các phép chia liên tiếp để tìm ƯCLN (a, b).

Ví dụ :

Tìm ƯCLN (300, 105)

– Chia 300 cho 105, ta được dư 90

– Chia 105 cho 90, ta được dư 15

– Chia 90 cho 15, ta được dư 0

Vậy : ƯCLN (300; 105) = 15

Có thể thấy rõ điều đó như sau :

$300 = 105.2 + 90 \Rightarrow (300; 105) = (105; 90)$

$105 = 90.1 + 15 \Rightarrow (105; 90) = (90; 15)$

$90 = 15.6 \Rightarrow (90; 15) = 15$

Vậy : (300; 105) = 15

Trong thực hành, ta đặt phép tính như sau :

		300	105
	105	90	2
90	15	1	
0	6		

4. Một số định lí quan trọng

Định lí 1

Một số d là ước chung của a và b khi và chỉ khi d là ước của ƯCLN (a, b).

$$d \mid a \text{ và } d \mid b \Rightarrow d \mid (a, b)$$

Định lí 2

Một số m là bội chung của a và b khi và chỉ khi m là bội của BCNN (a, b).

$$m \vdots a \text{ và } m \vdots b \Leftrightarrow m \vdots [a, b]$$

Định lí 3

$$(a,b) \cdot [a,b] = ab$$

Định lí 4

Nếu a, b nguyên tố cùng nhau và tích a.c chia hết cho b thì c chia hết cho b.

$$ac \vdots b \text{ và } (a,b) = 1 \Rightarrow c \vdots b$$

Định lí 5

Nếu c chia hết cho a và cho b mà a, b nguyên tố cùng nhau thì c chia hết cho tích a.b.

$$c \vdots a,\ c \vdots b \text{ và } (a,b) = 1 \Rightarrow c \vdots a.b.$$

II. PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ CHIA HẾT

Phương pháp 1

Để chứng minh A(n) chia hết cho p, có thể xét mọi trường hợp về số dư khi chia n cho p.

Bài 106

Chứng minh rằng với mọi $n \in Z$:

$$A(n) = n(n^2 + 1)(n^2 + 4) \vdots 5$$

GIẢI

Xét mọi trường hợp khi chia $n \in Z$ cho 5, ta có số dư là $r = 0, \pm 1, \pm 2$.

a) $r = 0 \Rightarrow n \vdots 5$

b) $r = \pm 1 \Rightarrow n = 5k \pm 1$

$\Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 10k + 1$

$\Rightarrow n^2 + 4 \vdots 5$

c) $r = \pm 2 \Rightarrow n = 5k \pm 2$

$\Rightarrow n^2 = 25k^2 \pm 20k + 4$

$\Rightarrow n^2 + 1 \vdots 5$

A(n) là tích của ba thừa số, trong mọi trường hợp đều có một thừa số chia hết cho 5. Vậy $A(n) \vdots 5$, với mọi $n \in Z$ (đpcm)

Bài 107

Chứng minh rằng :

a) Tổng của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 3;

b) Tổng của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho 5;

c) Tổng của 2k + 1 số nguyên liên tiếp chia hết cho 2k + 1.

GỢI Ý :

a) $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$;

b) $(n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 5n$;

c) $(n - k) + (n - k + 1) + ... + n + (n + 1) + ... + (n + k - 1) + (n + k) = (2k + 1)n$.

Bài 108

Chứng minh rằng :

a) Trong hai số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 2 (chẵn);

b) Trong ba số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho 3;

c) Trong k số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho k.

GIẢI

a) Hai số nguyên liên tiếp là n và $n + 1$.

Nếu n chia hết cho 2 thì $n + 1$ không chia hết cho 2.

Nếu n không chia hết cho 2 thì $n + 1$ chia hết cho 2.

b) Ba số nguyên liên tiếp là $n, n + 1, n + 2$.

Nếu $n \vdots 3$ thì $n + 1$ và $n + 2$ không chia hết cho 3.

Nếu n không chia hết cho 3, thì chia n cho 3, ta có số dư là 1 hoặc 2;

$n = 3q + 1 \Rightarrow n + 2 = (3q + 3) \vdots 3$, lúc đó $n + 1$ không chia hết cho 3.

$n = 3q + 2 \Rightarrow n + 1 = (3q + 3) \vdots 3$, lúc đó $n + 2$ không chia hết cho 3.

Như vậy : trong dãy ba số nguyên liên tiếp, bao giờ cũng có một và chỉ một số chia hết cho 3 (đpcm).

c) k số nguyên liên tiếp có dạng :

$$n, n + 1, n + 2, \ldots, n + k - 1 \qquad (1)$$

Ta chứng minh hai phần :

α) Trong dãy (1), bao giờ cũng có một số chia hết cho k.

Thật vậy, số n có thể viết :

$$n = kq + r \text{ với } 0 \leq r < k$$

(r là số dư khi chia n cho k).

– Nếu $r = 0$ thì n chia hết cho k.

– Nếu $r \neq 0$, ta xét số

$$n' = n + (k - r)$$

Vì $0 < r < k$, nên $0 < k - r \leq k - 1$

Do đó n' là một số thuộc dãy (1).

$$n' = n + (k - r) = (kq + r) + k - r = k(q + 1) \vdots k$$

nghĩa là nếu $r \neq 0$ thì $n' = n + (k - r)$ chia hết cho k.

β/ Trong dãy (1) chỉ có một số chia hết cho k.

Ta chứng minh điều này *bằng phản chứng.*

Giả sử trong dãy (1) có hai số m và p cùng chia hết cho k, và giả sử $m > p$. Thế thì hiệu của $m - p$ cũng *chia hết cho k.*

Trong dãy (1), hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất bằng $(n + k - 1) - n = k - 1$, do đó :

$$0 < m - p \leq k - 1$$

và số $m - p$ này *không thể chia hết cho k.*

Mâu thuẫn đó ($m - p$ chia hết cho k, đồng thời lại không chia hết cho k) chứng tỏ trong dãy (1) *có nhiều nhất là một* số chia hết cho k.

Từ hai phần α) và β), ta kết luận được :

Trong k số nguyên liên tiếp, có một và chỉ một số chia hết cho k (đpcm).

Phương pháp 2

Để chứng minh A(n) chia hết cho một số m, nói chung nên phân tích m ra thừa số : $m = p.q$.

1) Nếu p, q nguyên tố cùng nhau *thì ta tìm cách chứng minh :* $A(n) \vdots p$ *và* $A(n) \vdots q$

(Suy ra $A(n) \vdots p.q$, theo định lí 5 về chia hết)

2) Nếu p, q **không nguyên tố cùng nhau** *thì ta phân tích A(n) ra thừa số :* $A(n) = B(n).C(n)$ *và tìm cách chứng minh*

$$B(n) \vdots p \text{ và } C(n) \vdots q$$

(Suy ra $B(n).C(n) \vdots p.q$*)*

Bài 109

a) Chứng minh rằng tích của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 6.

b) Tích của 4 số nguyên liên tiếp chia hết cho bao nhiêu ?

GIẢI

a) Gọi ba số nguyên liên tiếp là n, n + 1 và n + 2

Tích của chúng là : $A(n) = n(n + 1)(n + 2)$

Ta có 6 = 2.3 (2 và 3 là số nguyên tố).

Trong hai số nguyên liên tiếp n và n + 1, bao giờ cũng có một số chẵn, do đó $A(n) \vdots 2$.

Trong ba số nguyên liên tiếp n, n + 1 và n + 2 bao giờ cũng có một số chia hết cho 3 (bài 108), nên tích của chúng luôn chia hết cho 3 : $A(n) \vdots 3$.

$$A(n) \vdots 2 \text{ và } A(n) \vdots 3, \text{ mà } (2, 3) = 1 \text{ nên}$$

$$A(n) \vdots 2{,}3 = 6 \text{ (đpcm)}$$

Chú ý rằng : ba số nguyên liên tiếp có thể là n − 1, n và n + 1 như vậy ta có : $(n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1) = n^3 - n$ chia hết cho 6.

b) $A(n) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$

Trước hết, ta thấy rằng trong bốn số nguyên liên tiếp; n, n + 1, n + 2, n + 3, bao giờ cũng có một số chia hết cho 2 và một số khác chia hết cho 4. Thật vậy :

nếu $n = 2k$ thì $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$

do đó :

– Khi k chẵn thì $n \vdots 4$ còn $n + 2 \vdots 2$

– Khi k lẻ thì $n + 2 \vdots 4$ còn $n \vdots 2$

Tương tự như vậy, nếu xét $n + 1 = 2k$ thì trong hai số $n + 1$ và $n + 3$ có một số chia hết cho 4, số kia chia hết cho 2.

Do đó $A(n) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3) \vdots 2.4 = 8$

Theo a) thì $n(n + 1)(n + 2) \vdots 3$ mà $(3; 8) = 1$ nên $A(n) \vdots 3.8 = 24$.

Bạn hãy xét tiếp : tích của năm số nguyên liên tiếp chia hết cho bao nhiêu ?

Bài 110

Chứng minh rằng tích của hai số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

GIẢI

Gọi số chẵn thứ nhất là 2n, số chẵn tiếp theo là $2n + 2$.

Tích của chúng là $A(n) = 2n(2n + 2)$

Ta có : $8 = 4.2$

Do đó ta viết : $A(n) = 4.n(n + 1)$

A(n) là tích của hai thừa số: một thừa số là 4, chia hết cho 4 và một thừa số là $n(n + 1)$ chia hết cho 2.

Vì vậy : $A(n) = 4.n(n + 1) \vdots 4.2 = 8$ (đpcm)

Bạn xét tiếp : Tích của ba số chẵn liên tiếp chia hết cho bao nhiêu ?

Phương pháp 3

Để chứng minh A(n) chia hết cho m, có thể biến đổi A(n) thành tổng của nhiều hạng tử và chứng minh mỗi hạng tử chia hết cho m.

Bài 111

Chứng minh rằng lập phương của một số nguyên n bất kì ($n > 1$) trừ đi 13 lần số nguyên đó thì luôn chia hết cho 6.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1970)

GIẢI

Ta phải chứng minh : $A(n) = n^3 - 13n \vdots 6$

Chú ý rằng : $13n = 12n + n$, mà $12n \vdots 6$, ta biến đổi A(n) thành

$$A(n) = (n^3 - n) - 12n$$

Ta có : $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$

Đây là tích của ba số nguyên liên tiếp, tích này luôn chia hết cho 6 (xem bài 109)

A(n) là hiệu của hai hạng tử : $n^3 - n$ và $12n$, mỗi hạng tử chia hết cho 6, nên : $A(n) \vdots 6$ (đpcm)

Bài 112

Chứng minh rằng tổng lập phương của ba số nguyên liên tiếp chia hết cho 9.

GIẢI

Ba số nguyên liên tiếp là n, $n + 1$, $n + 2$, ta phải chứng minh:

$$A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$$

chia hết cho 9.

Ta có : $A = n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3$

$= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9$

$= 3n^3 - 3n + 18n + 9n^2 + 9$

$= 3n(n - 1)(n + 1) + 18n + 9 + 9n^2$

n, n − 1, n + 1 là ba số nguyên liên tiếp, trong đó một số chia hết cho 3, vậy :

$$B = 3n(n-1)(n+1) \vdots 9$$

$$C = 18n + 9n^2 + 9 \vdots 9$$

$$A = B + C \text{ mà } B \vdots 9,\ C \vdots 9 \text{ nên } A \vdots 9$$

Để chứng minh một tổng không chia hết cho m, ta chứng minh một hạng tử nào đó không chia hết cho m, còn tất cả các hạng tử khác đều chia hết cho m.

Bài 113

Chứng minh rằng : $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8 với mọi số n lẻ.

GIẢI

Đặt $n = 2k + 1$, ta có :

$$\begin{aligned} n^2 + 4n + 5 &= (2k+1)^2 + 4(2k+1) + 5 \\ &= (4k^2 + 4k + 1) + (8k + 4) + 5 \\ &= (4k^2 + 4k) + (8k + 8) + 2 \\ &= 4k(k+1) + 8(k+1) + 2 \end{aligned}$$

Đây là tổng của ba hạng tử, hạng tử đầu $4k(k + 1)$ chia hết cho 8 (xem bài 110), hạng tử thứ hai $8(k + 1)$ cũng chia hết cho 8, riêng hạng tử thứ ba là 2 không chia hết cho 8. Vậy tổng đã cho không chia hết 8 (đpcm).

Bài 114

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n :

a) $n^3 - n + 4$ không chia hết cho 3 ;

b) $n^2 + 11n + 39$ không chia hết cho 49;

c) $n^2 + 3n + 5$ không chia hết cho 121.

GỢI Ý :

a) Xem lại bài 109.

b) $A(n) = (n^2 + 11n + 18) + 21 = (n + 9)(n + 2) + 21$

Mà $(n + 9) - (n + 2) = 7$, nên có tất cả hai khả năng :

* $n + 9$ và $n + 2$ cùng chia hết cho 7, lúc đó:

$(n + 9)(n + 2)$ chia hết cho $7.7 = 49$.

* $n + 9$ và $n + 2$ đều không chia hết cho 7, lúc đó:

$(n + 9)(n + 2)$ không chia hết cho 7. Mà $21 \vdots 7$ nên A(n) không chia hết cho 7. Suy ra điều phải chứng minh.

c) $n^2 + 3n + 5 = (n + 7)(n - 4) + 33$

$(n + 7) - (n - 4)$ chia hết cho 11. Tương tự b).

Phương pháp 4

Để chứng minh A(n) chia hết cho m, ta có thể phân tích A(n) thành nhân tử, trong đó có một nhân tử bằng m :

$$A(n) = m.B(n)$$

Thường phải sử dụng các hằng đẳng thức. Nói riêng, từ các hằng đẳng thức (9), (10) và (11) ở §4, ta có :

$a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ $(a \neq b)$ với n bất kì

$a^n - b^n$ chia hết cho $a + b$ $(a \neq -b)$ với n chẵn $(n = 2k)$

$a^n + b^n$ chia hết cho $a + b$ $(a \neq -b)$ với n lẻ $(n = 2k + 1)$.

Bài 115

Chứng minh rằng : $2^5 + 3^5 + 5^5 \vdots 5$

GỢI Ý :

Vì 5 là số lẻ, nên $2^5 + 3^5 \vdots (2 + 3)$

Bài 116

Chứng minh : $2^{4n} - 1$ chia hết cho 15.

GIẢI

$$2^{4n} - 1 = (2^4)^n - 1^n = (2^4 - 1)[(2^4)^{n-1} + ... + 1] = 15.M$$

Vậy : $(2^{4n} - 1) \vdots 15$.

Bài 117

Chứng minh rằng tổng :

$$A = 7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + ... + 7^{4k}$$

(trong đó k là số tự nhiên) chia hết cho 400.

GIẢI

Hãy nhóm các hạng tử của tổng đã cho theo cách :

$$A = (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + (7^5 + 7^6 + 7^7 + 7^8) + ... + (7^{4k-3} + 7^{4k-2} + 7^{4k-1} + 7^{4k})$$

$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + 7^4(7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + ... + 7^{4k-4}(7^1 + 7^2 + 7^3 + 7^4)$$

$$= (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4)(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4k-4})$$

$$= 7(1 + 7 + 49 + 343)(1 + 7^4 + 7^8 + ... + 7^{4k-4}) = 7.400.M$$

Vậy $A \vdots 400$

Bài 118

Chứng minh biểu thức : $A = 75(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 5) + 25$ chia hết cho 4^{1976}.

(Theo bài thi vào chuyên toán Hà Nội 1976 – vòng 1)

GỢI Ý :

Viết A dưới dạng :

$$A = 25 . 3(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 4 + 1) + 25 .$$
$$= 25(4 - 1)(4^{1975} + 4^{1974} + ... + 4^2 + 4 + 1) + 25$$

Áp dụng hằng đẳng thức (9). §4, ta có :

$$A = 25(4^{1976} - 1) + 25 = 25 . 4^{1976}$$

Vậy : $A \vdots 4^{1976}$

Phương pháp 5

Dùng nguyên tắc Dirichlet

Bài 119

Chứng minh rằng :

a) Trong 11 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có cũng chữ số tận cùng.

b) Trong m + 1 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có hiệu chia hết cho m.

GIẢI

a) Một số nguyên chỉ có tận cùng bằng một trong 10 chữ số: 0, 1, 2,... 9. Lấy 11 số nguyên, theo *nguyên tắc Dirichlet*, phải có hai số cùng chữ số tận cùng.

b) Chia một số cho m thì ta có số dư là một trong m số : 0, 1, 2, ..., m − 1.

Do đó theo nguyên tắc Dirichlet chia m + 1 số cho m thì phải có ít nhất hai số cho cùng số dư. Hiệu của hai số này chia hết cho m (đpcm).

Chú ý rằng câu a) là trường hợp đặc biệt của câu b) khi cho m = 10 (chữ số tận cùng của một số biểu diễn số dư khi chia số đó cho 10).

Nguyên tắc Dirichlet (Đi-rich-lê)

Ta đã biết chứng minh nhiều định lí, giải nhiều bài toán bằng phương pháp phản chứng. *Trong nhiều trường hợp, điều thuận lợi là dùng* nguyên tắc Dirichlet.

Nguyên tắc Dirichlet là một định lí, có thể chứng minh dễ dàng bằng phản chứng, đã được nhà toán học Đức Dirichlet (1805 - 1859) áp dụng để chứng minh nhiều định lí toán học. Nguyên tắc Dirichlet thường được phát biểu dưới dạng hình ảnh đơn giản như sau :

Nếu nhốt 9 chú thỏ vào 4 cái chuồng thì phải có một cái chuồng nhốt ít nhất là 3 chú thỏ.

Thật vậy, nếu chuồng nào cũng chỉ nhốt có 2 chú thỏ, thì 4 chuồng chỉ nhốt được 8 chú thỏ, trái với giả thiết là có 9 chú thỏ.

Người ta cũng gọi nguyên tắc Dirichlet là nguyên tắc chuồng thỏ *hay* nguyên tắc chuồng chim bồ câu.

Trong lời giải bài 119 ở trên, ta đã áp dụng nguyên tắc Dirichlet như sau : Ta nhốt tất cả các số nguyên vào các "chuồng", những số nguyên nào khi chia cho m mà cho cùng số dư thì được nhốt vào cùng một "chuồng"; vì tất cả chỉ có m số dư khác nhau (từ 0 đến m − 1), nên tất cả chỉ có m "chuồng". Nếu ta lấy m + 1 số nguyên thì phải có ít nhất hai số nguyên được "nhốt" chung một "chuồng", tức có cùng số dư khi chia cho m.

Bạn hãy dùng nguyên tắc Dirichlet để giải các bài 120 và 121 sau đây :

Bài 120

a) Chứng minh rằng trong m số nguyên bất kì, bao giờ cũng có một số chia hết cho m hoặc tổng của một nhóm các số trong m số đó chia hết cho m.

b) Có hay không một số có dạng : 19911991...1991000000 chia hết cho 1990.

GIẢI

a) Gọi m số nguyên đã cho là a_1, a_2, ... , a_m. Nếu không có số nào chia hết cho m thì ta lập m tổng :

$$a_1$$
$$a_1 + a_2$$
$$a_1 + a_2 + a_3$$
$$...$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m$$

Có tất cả hai trường hợp :

– Một trong các tổng trên chia hết cho m. Đó là điều phải chứng minh.

– Không có một tổng nào trong các tổng trên chia hết cho m; như vậy số dư khi chia mỗi tổng trên cho m là một số từ 1 đến m – 1 (có tất cả m – 1 số dư). Ta có m tổng, do đó theo *nguyên tắc Dirichlet*, phải có hai tổng có cùng số dư ($\neq 0$) khi chia cho m. Hiệu của hai tổng này (là tổng của một số các số đã cho) chia hết cho m (đpcm).

b) Ta lập dãy số có dạng :

1991

1991 1991

1991 1991 1991

...

1991 1991 ... 1991

(Ở dãy số này bộ bốn chữ số 1, 9, 9, 1 có mặt lần lượt 1 lần, 2 lần... 1990 lần).

Chia các số trên đây cho 1990, ta có 1989 *số dư khác 0*. Theo nguyên tắc Dirichlet, phải có ít nhất hai số cho cùng một số dư, hiệu hai số này (là một số có dạng 1991 1991...0000) chia hết cho 1990 (đpcm).

Bài 121

Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1983)

GIẢI

Cho k lần lượt lấy $10^5 + 1$ giá trị liên tiếp, từ 1 trở đi, ta được $10^5 + 1$ giá trị khác nhau của $1983^k - 1$. Chia $10^5 + 1$ số này cho 10^5, ta chỉ có nhiều nhất là 10^5 số dư; vì vậy theo *nguyên tắc Dirichlet*, phải có ít nhất hai số cho cùng số dư khi chia cho 10^5. Giả sử số đó là $1983^m - 1$ và $1983^n - 1 (m > n)$. Thế thì hiệu của hai số này phải chia hết cho 10^5.

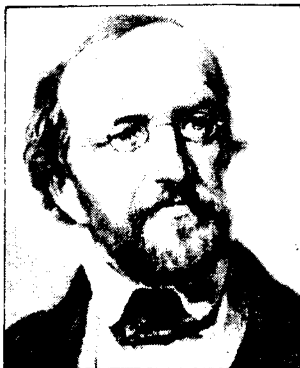
$$(1983^m - 1) - (1983^n - 1) \text{ chia hết cho } 10^5 .$$

$$\text{Mà } (1983^m - 1) - (1983^n - 1) = 1983^m - 1983^n = $$
$$= 1983^n . (1983^{m-n} - 1)$$

Nhưng 10^5 và 1983^n nguyên tố cùng nhau, do đó phải có $1983^{m-n} - 1$ chia hết cho 10^5. Như vậy là có số k' = m − n sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5 (đpcm).

P. DIRICHLET
(1805 - 1859)

P. Dirichlet là nhà toán học Đức, nổi tiếng với nhiều phát minh lớn về lí thuyết số và giải tích toán học. Ông đã chứng minh định lí: "Trong dãy số nguyên ax + b, với a và b nguyên tố cùng nhau, có vô số số nguyên tố".



Dirichlet là giáo sư kế tục Gauss ở trường đại học Göttingen (Đức). Những bài giảng của ông, thường bắt đầu với những nhận xét đơn giản không ngờ, sau đó là sự phân tích vấn đề cực kì sâu sắc, đã ảnh hưởng to lớn đến nhiều nhà toán học xuất sắc thuộc thế hệ sau. Có thể nói rằng Dirichlet đã mở đầu cho một thời hoàng kim của toán học ở Đức.

Phương pháp 6

Dùng thuật toán Euclid để tìm UCLN (a, b)

Bài 122

Chứng minh rằng :

a) (5a + 3b, 13a + 8b) = (a, b) **b) (18a + 5b, 11a + 3b) = (a, b)**

GIẢI

a) $13a + 8b = (5a + 3b).2 + (3a + 2b)$

$\Rightarrow (13a + 8b, 5a + 3b) = (5a + 3b, 3a + 2b)$

$5a + 3b = (3a + 2b).1 + (2a + b)$

$\Rightarrow (5a + 3b, 3a + 2b) = (3a + 2b, 2a + b)$

$3a + 2b = (2a + b) + (a + b)$

$\Rightarrow (3a + 2b, 2a + b) = (2a + b, a + b)$

$2a + b = (a + b).1 + a$

$\Rightarrow (2a + b, a + b) = (a + b, a)$

$a + b = a.1 + b$

$\Rightarrow (a + b, a) = (a, b)$ (đpcm)

b) Tương tự a)

Bài 123

Tìm (11a + 2b, 18a + 5b) biết (a, b) = 1.

GIẢI

Nhờ thuật toán Euclid ta tìm được :

$$d = (18a + 5b, 11a + 2b) = (a - 5b, 19b)$$

d là ước của 19b ⇒ $d \mid b$ hoặc $d \mid 19$.

a) $d \mid 19 \Rightarrow d = 19$ hoặc $d = 1$.

b) $d \mid b$, mà d cũng là ước của $a - 5b$,

Suy ra $d \mid a$.

$d \mid b$ và $d \mid a$, mà $(a, b) = 1$ theo giả thiết, nên phải có $d = 1$.

Tóm lại, $(18a + 5b, 11a + 2b) = 19$

hoặc $(18a + 5b, 11a + 2b) = 1$

III. MỘT SỐ BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 124

Chứng minh rằng với n là số tự nhiên chẵn thì biểu thức :

$$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 \text{ chia hết cho } 323.$$

GIẢI

Chú ý rằng $323 = 17.19$ và $(17, 19) = 1$ nên ta sẽ chứng minh:

$$A \vdots 17 \text{ và } A \vdots 19$$

Ta viết : $A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 3^n) + (16^n - 1)$

Ta có :

$B = 20^n - 3^n \vdots (20 - 3) \Rightarrow B = 20^n - 3^n \vdots 17$

và $C = 16^n - 1 \vdots (16 + 1)$ (do n chẵn) $\Rightarrow C = 16^n - 1 \vdots 17$

Do đó : $A = B + C$ chia hết cho 17 (1)

Tương tự, ta lại viết :

$$A = 20^n + 16^n - 3^n - 1 = (20^n - 1) + (16^n - 3^n)$$

Ta có :

$D = 20^n - 1 \vdots (20 - 1) \Rightarrow D = 20^n - 1 \vdots 19$

$E = 16^n - 3^n \vdots (16 + 3)$ (do n chẵn) $\Rightarrow E = 16^n - 3^n \vdots 19$

Do đó : $A = D + E$ chia hết cho 19 (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra : $A \vdots 17.19$, tức là $A \vdots 323$.

Bài 125

a) Phân tích biểu thức ra nhân tử : $A = x^3(x^2 - 7)^2 - 36x$

b) Dựa vào kết quả câu trên hãy chứng minh biểu thức :

$$n^3(n^2 - 7)^2 - 36n$$

luôn luôn chia hết cho 7 với mọi số nguyên n.

(Đề thi vào lớp chuyên toán Miền Bắc, 1972)

GIẢI

a) Kết quả : $A = x(x - 3)(x + 3)(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

b) Theo kết quả trên, ta có :

$$n^3(n^2 - 7)^2 - 36n = $$
$$= n(n - 3)(n + 3)(n - 1)(n + 1)(n - 2)(n + 2)$$

Đây là tích của 7 số nguyên liên tiếp, trong 7 số nguyên liên tiếp bao giờ cũng có một số chia hết cho 7 (bài 108), nên tích chia hết cho 7 (đpcm)

Bài 126

a) Phân tích ra thừa số : $A = a^4 - 6a^3 + 27a^2 - 54a + 32$

b) Từ kết quả câu trên suy ra rằng biểu thức :

$$n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32$$

luôn luôn là số chẵn với mọi số nguyên n.

(Đề thi vào lớp chuyên toán Miền Bắc, 1975)

GIẢI

a) $a = 1 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (a - 1)$, theo định lý Bézout.

$a = 2 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow A \vdots (a - 2)$

Vậy : $A \vdots (a - 1)(a - 2)$

Thực hiện phép chia A cho $(a - 1)(a - 2)$, ta có kết quả :

$$A = a^4 - 6a^3 + 27a^2 - 54a + 32$$
$$= (a - 1)(a - 2)(a^2 - 3a + 16)$$

Chú ý : Có thể phân tích theo phương pháp nhóm số hạng và sử dụng các hằng đẳng thức :

b) Theo kết quả phần a), ta có :

$n^4 - 6n^3 + 27n^2 - 54n + 32 = (n - 2)(n - 1)(n^2 - 3n + 16)$

$n - 2$ và $n - 1$ là số nguyên liên tiếp, chắc chắn phải có một số chia hết cho 2.

Bài 127

Chứng minh rằng tổng của một số có hai chữ số với số gồm các chữ số đã cho viết theo thứ tự ngược lại thì chia hết cho 11.

Bài 128

Chứng minh rằng :

$5 . 7^{2(n+1)} + 2^{3n}$ chia hết cho 41 với n là số nguyên dương.

GỢI Ý :

$$A = 5 . 7^{2(n+1)} + 2^{3n} = 5 . 49^{n+1} + 8^n$$
$$= 5(41 + 8)^{n+1} + 8^n$$

Áp dụng công thức nhị thức Newton (12) §4, ta có :

$$(41 + 8)^{n+1} = 41^{n+1} + (n + 1)41^n . 8 + \frac{n(n + 1)}{2} 41^{n-2} . 8^2 +$$

$$... + (n + 1)41 . 8^n + 8^{n+1} = 41.M + 8^{n+1}$$

trong đó $M = 41^n + (n + 1)41^{n-1} . 8 + ... + (n + 1)8^n$ là một số nguyên.

Vậy : $A = 5(41 . M + 8^{n+1}) + 8^n$

$= 41 . 5M + 8^n(5 . 8 + 1)$

$= 41 . (5M + 8^n)$

Suy ra $A \vdots 41$

Bài 129

Chứng minh rằng số : $\mathbf{19 . 8^n + 17}$
là hợp số với mọi số tự nhiên n.

(Đề thi vô địch toán Anh, 1976)

GỢI Ý :

Xét các trường hợp n = 2k, n = 4k + 1 và n = 4k + 3

a) n = 2k

$$A = 19 . 8^{2k} + 17 = 18 . 8^{2k} + 8^{2k} + (18 - 1)$$

Mà : $8^{2k} = 64^k = (63 + 1)^k$, $63 = 3 . 21$ nên 8^{2k} chia cho 3 dư 1.

Suy ra : $A \vdots 3$.

b) n = 4k + 1

$$A = 19 . 8^{4k+1} + 17$$
$$= 13 . 8^{4k+1} + 48 . 64^{2k} + 17$$
$$= 13 . 8^{4k+1} + 39 . 64^{2k} + 9(1 - 65)^{2k} + (13 + 4)$$

Chú ý rằng 65 = 13.5; $(1 - 65)^{2k}$ chia cho 13 dư 1.

Suy ra : $A \vdots 13$.

c) $n = 4k + 3$

$$A = 19 . 8^{4k+3} + 17$$
$$= 15 . 8^{4k+3} + 4 . 8^3 . 64^{2k} + 17$$
$$= 15 . 18^{4k+3} + 4 . 510 . 64^{2k} + 4 . 2(1 - 65)^{2k} + (25 - 8) .$$

Suy ra : $A \vdots 5$

Bài 130

Chứng minh rằng : $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$

chia hết cho 24 với mọi $n \in N$.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II Miền Bắc, 1975)

GỢI Ý :

Phân tích thành nhân tử : $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ rà trở lại bài 109.

Bài 131

Chứng minh rằng số : $n^n - n^2 + n - 1$ chia hết cho $(n - 1)^2$, với mọi số nguyên $n > 1$.

(Đề thi vô địch Toán New York, 1975)

GIẢI

Với $n = 2$ thì $n^n - n^2 + n - 1 = 1$ chia hết cho

$$(n - 1)^2 = (2 - 1)^2 = 1$$

Với $n > 2$, ta có :

$$A = n^n - n^2 + n - 1$$
$$= (n^{n-2} - 1)n^2 + (n - 1)$$
$$= (n - 1)(n^{n-3} + \dots + 1)n^2 + (n - 1)$$
$$= (n - 1)(n^{n-1} + \dots + n^2 + 1)$$

Xét tổng $B = n^{n-1} + \ldots + n^2 + 1$

B có n − 1 số hạng, ta có thể viết :

$B = (n^{n-1} - 1) + (n^{n-2} - 1) + \ldots + (n^2 - 1) + (n - 1) + (1 - 1)$

Mỗi hiệu trong dấu ngoặc đều chia hết cho (n − 1) do đó B chia hết cho n − 1. Vì vậy :

$A = (n - 1)B$ chia hết cho $(n - 1)^2$ (đpcm)

Bài 132

Chứng minh rằng biểu thức : $A = k^4 + 2k^3 - 16k^2 - 2k + 15$ chia hết cho 16 với mọi giá trị nguyên và lẻ của k.

GỢI Ý :

Phân tích A thành $(k - 1)(k + 1)(k - 3)(k + 5)$

Khi k nguyên và lẻ thì cả bốn nhân tử trên đều chẵn, do vậy đều chia hết cho 2. Vậy cả tích phải chia hết cho 16.

Nhận xét :

Có thể viết : $A = (k - 3)(k - 1)(k + 1)(k + 5)$

ta thấy $k - 3$, $k - 1$ và $k + 1$ là ba số chẵn liên tiếp (do k lẻ), và có thể chứng minh được A chia hết cho 96 (xem bài 108).

Bài 133

Chứng minh rằng các số có dạng : $n^4 - 4n^3 - 4n^2 + 16n$ với n chẵn và lớn hơn 4 thì chia hết cho 384.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II Miền Bắc, 1971)

GIẢI

Ta phân tích biểu thức đã cho thành nhân tử :

$$A = n(n - 2)(n + 2)(n - 4)$$

Vì n chẵn và lớn hơn 4 nên ta đặt n = 2k + 2 (k > 1) và biểu diễn theo k, ta có :

$$A = (2k + 2)(2k)(2k + 4)(2k - 2)$$
$$= 16k(k - 1)(k + 1)(k + 2)$$
$$= 16(k - 1)(k)(k + 1)(k + 2)$$

Ta nhận thấy (k − 1)(k)(k + 1)(k + 2) là tích của bốn số nguyên dương liên tiếp, tích này chia hết cho 24 (xem bài 109).

Vậy tích A đã cho chia hết cho 16.24 = 384 (đpcm)

• ĐỒNG DƯ THỨC

Lí thuyết đồng dư do nhà toán học Đức lỗi lạc C.F. Gauss (Gau–xơ 1777 – 1855) xây dựng, là một lí thuyết rất quan trọng trong số học. Theo lịch sử, nhiều nhà toán học Trung Quốc đã có khái niệm về đồng dư và vận dụng nó trong việc giải nhiều bài toán từ nhiều thế kỉ trước đó.

Việc hiểu biết một vài khái niệm ban đầu về đồng dư thức giúp chúng ta tìm thấy cách giải rất hay của nhiều bài toán về chia hết trong tập hợp z các số nguyên.

1. Định nghĩa

Xét hai số 22 và 7. Chia 22 cho 5 và chia 7 cho 5, ta đều được số dư là 2. Hai số 22 và 7 cho cùng số dư (2) khi chia cho 5, ta nói 22 đồng dư với 7 theo modun 5 *và viết :*

$$22 \equiv 7 \pmod 5$$

Tổng quát, cho số nguyên m > 0. Nếu hai số nguyên a và b cho cùng số dư khi chia cho m (tức là a − b chia hết cho m) thì ta nói rằng a đồng dư với b theo modun m và viết :

$$a \equiv b \pmod m$$
$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow_{dn} a - b \,\vdots\, m$$

Ví dụ : *Theo định nghĩa, ta có :*

$46 - 16 = 30 \vdots 10 \quad \Rightarrow 46 \equiv 16 \pmod{10}$

$-2 - 16 = -18 \vdots 3 \quad \Rightarrow -2 \equiv 16 \pmod{3}$

$5 \equiv 1 \pmod{2} \quad \Rightarrow 5 - 1 = 4 \vdots 2$

$10 \equiv -1 \pmod{11} \quad \Rightarrow 10 - (-1) = 11 \vdots 11$

Ta biết rằng : a − b chia hết cho m (hay a − b là bội của m) có nghĩa là có số nguyên t sao cho a − b = m.t.

Vì vậy, ta có : $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow a = b + m.t.$

2. Các tính chất của đồng dư thức

a) *Đồng dư thức có những tính chất sau đây, tương tự các tính chất của đẳng thức :*

Với mọi a, b, c, d, m ∈ Z và m > 0.

(1) $a \equiv a \pmod{m}$

(2) $a \equiv b \pmod{m} \quad \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

(3) $\begin{cases} a \equiv b \pmod{m} \\ b \equiv c \pmod{m} \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

(tính chất bắc cầu)

Do các tính chất (1), (2) và (3), quan hệ đồng dư là một quan hệ tương đương *trong Z, chia Z ra thành m lớp, hai số nguyên trong cùng một lớp thì đồng dư với nhau (mod m), hai số nguyên khác lớp thì không đồng dư với nhau (mod m).*

(4) *Nếu* $a \equiv b \pmod{m}$

$c \equiv d \pmod{m}$

thì $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$

$a.c \equiv b.d \pmod{m}.$

Nghĩa là : ta có thể cộng, trừ hay nhân từng vế hai đồng dư thức theo cùng môđun.

Từ đó, suy ra quy tắc thực hành sau đây (như đối với đẳng thức) :

Có thể cộng hay trừ cùng một số vào hai vế của một đồng dư thức.

Có thể chuyển một số từ vế này sang vế kia của đồng dư thức, nhưng phải đổi dấu của nó.

Có thể nhân hai vế của đồng dư thức với cùng một số, có thể nâng hai vế của đồng dư thức lên cùng một lũy thừa :

$$a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \ (mod\ m)$$

$$a + c \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow a \equiv b - c \ (mod\ m)$$

$$a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow n.a \equiv n.b \ (mod\ m)$$

$$a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (mod\ m)$$

b) Các tính chất khác của đồng dư thức :

$$(5) \begin{cases} a \equiv b \ (mod\ m) \\ a = ka',\ b = kb',\ (k, m) = 1 \end{cases} \Rightarrow a' \equiv b' \ (mod\ m)$$

Ta có thể chia hai vế của một đồng dư thức cho ước chung của chúng, nếu ước này nguyên tố với modun m.

Ví dụ : $48 \equiv 18 \ (mod\ 10)$

48 và 18 có ước chung là 3, nguyên tố với 10

Ta có thể chia hai vế cho 3 :

$$16 \equiv 6 \ (mod\ 10)$$

Chú ý rằng 48 và 18 cũng có ước chung là 6, nhưng 6 không nguyên tố với 10, vì vậy không thể chia hai vế của đồng dư thức 48 ≡ 18 (mod 10) cho 6 được :

$$48 : 6 = 8,\ 18 : 6 = 3 \text{ mà } 8 \not\equiv 3 \ (mod\ 10).$$

(6) $a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow a.c \equiv b.c \ (mod\ m.c)$ *với* $c > 0$.

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv b \ (mod\ m) \\ d > 0 \text{ là ước chung} \\ \text{của } a,\ b,\ m \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{d} \equiv \frac{b}{d} \left(mod\ \frac{m}{d}\right)$$

Ta có thể nhân hai vế và modun của đồng dư thức với cùng một số dương.

Ta có thể chia hai vế và modun của đồng dư thức cho ước chung dương của chúng.

Các tính chất trên đây của đồng dư thức có thể chứng minh dễ dàng, dựa vào định nghĩa của đồng dư thức. Chẳng hạn có thể chứng minh tính chất (5) như sau :

Nếu $a \equiv b \pmod m$ *mà* $a = ka'$, $b = kb'$ *thì ta có*

$$ka' \equiv kb' \pmod m \qquad (a)$$

Theo định nghĩa của đồng dư thức, từ (a) ta có :

$$ka' - kb' \vdots m$$

$$k(a' - b') \vdots m$$

Mà theo giả thiết thì $(k, m) = 1$, *do đó :* $a' - b' \vdots m$ *nghĩa là* $a' \equiv b' \pmod m$, *(đpcm)*

Bài 134

Tìm chữ số sau cùng của :

a) số 6^{713} ; **b) Số 2^{1000}**

GỢI Ý :

Chữ số sau cùng của một số n là số dư (không âm) khi chia n cho 10. Bài toán yêu cầu tìm số không âm nhỏ hơn 10 và đồng dư với 6^{713} theo modun 10.

GIẢI

a) Ta có : $6^2 = 36 \equiv 6 \pmod{10}$

Do đó : $6^n \equiv 6 \pmod{10}$ với mọi $n > 2$.

Suy ra : $6^{713} \equiv 6 \pmod{10}$ nghĩa là chữ số sau cùng của 6^{713} là 6.

b) Chú ý rằng : $2^4 = 16 \equiv 6 \pmod{10}$

$$1000 = 4.250$$

Ta có : $2^{1000} = 2^{4.250} = (2^4)^{250}$

$2^{1000} \equiv 6^{250} \equiv 6 \pmod{10}$

Tức là chữ số sau cùng của 2^{1000} cũng là 6.

Bài 135

Tìm số dư trong phép chia 3^{100} cho 7.

GIẢI

Ta phải tìm số có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn 7, dùng dư với 3^{1000} theo modun 7.

Ta có : $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod 7$

Do đó : $(3^3)^{33} \equiv (-1)^{33} \pmod 7$ mà : $(-1)^{33} = -1$

nên : $3^{100} = (3^3)^{33} . 3 \equiv (-1).3 \pmod 7$

$3^{100} \equiv -3 \pmod 7$

Vậy số dư khi chia 3^{100} cho 7 là -3 (hay là 4).

Bài 136

a) Tìm số dư trong phép chia 9526 và 37258 cho 11

b) Tìm dấu hiệu chia hết cho 11.

GIẢI

a) $9526 = 6 + 2 . 10 + 5 . 10^2 + 9 . 10^3$

Ta có : $10 \equiv -1 \pmod{11}$

$10^2 \equiv (-1)^2 = 1 \pmod{11}$

$10^3 \equiv (-1)^3 = -1 \pmod{11}$

Do đó : $2.10 \equiv 2.(-1) \pmod{11}$

$5 . 10^2 \equiv 5 . 1 \pmod{11}$

$9 . 10^3 \equiv 9 . (-1) \pmod{11}$

$9526 \equiv 6 - 2 + 5 - 9 \equiv 0 \pmod{11}$

Vậy 9526 chia hết cho 11.

Với số 37258, chú ý rằng $10^4 \equiv 1 \pmod{11}$

Ta có : $37258 \equiv 8 - 5 + 2 - 7 + 3 \equiv 1 \pmod{11}$.

Vậy : *chia 37258 cho 11, được số dư là 1.*

b) Tổng quát, ta có.

$10 \equiv -1 \pmod{11}$

do đó : $10^n \equiv 1 \pmod{11}$ nếu n chẵn

$10^n \equiv -1 \pmod{11}$ nếu n lẻ.

Vì vậy, với b, c, d... không âm :

$b.10 \equiv -b \pmod{11}$

$c . 10^2 \equiv c \pmod{11}$

$d . 10^3 \equiv -d \pmod{11}$

v.v...

Số tự nhiên n có thể viết :

$n = \ldots dcba = a + b . 10 + c.10^2 + d.10^3 + \ldots$

$n \equiv a - b + c - d + \ldots \pmod{11}$

Như vậy, số n chia hết cho 11 khi và chỉ khi tổng $a - b + c - d + \ldots$ chia hết cho 11.

Ví dụ :

Số 73219 không chia hết cho 11 vì :

$9 - 1 + 2 - 3 + 7 = 14 \equiv 3 \pmod{11}$

Số 262119 chia hết cho 11 vì :

$$9 - 1 + 1 - 2 + 6 - 2 = 11 \equiv 0 \pmod{11}$$

Gợi ý chung : Đối với các bài toán tìm số dư trong một phép chia, khi áp dụng đồng dư thức, ta tìm cách để đi đến $a \equiv b \pmod{m}$, với *b là số có giá trị tuyệt đối nhỏ nhất có thể được* (tốt nhất là $b = \pm 1$), từ đó tính $a^n \equiv b^n$ được thuận lợi.

Bài 137

Tìm hai chữ số cuối cùng của số 9^{9^9}

GỢI Ý :

Phải tìm số dư trong phép chia 9^{9^9} cho 100.

GIẢI

Ta xét hai chữ số cuối cùng của các số sau :

$9^1 = 09$; $9^2 = 81$; $9^3 = \ldots 29$; $9^4 = \ldots 61$;

$9^5 = \ldots 49$; $9^6 = \ldots 41$; $9^7 = \ldots 79$; $9^8 = \ldots 21$

$9^9 = \ldots 89$; $9^{10} = \ldots 01$

Vì 9^{10} là một số có hai chữ số cuối cùng là 01.

nên : $9^{10} \equiv 1 \pmod{100}$

do đó : $(9^{10})^n = 9^{10.n} \equiv 1 \pmod{100}$

Nếu k là số có chữ số sau cùng là p thì ta có : $k = 10.n + p$ và được : $9^k = 9^{10n + p} = 9^{10n} . 9^p$

Vì : $9^{10n} \equiv 1 \pmod{100}$ nên $9^k = 9^{10n} . 9^p \equiv 9p \pmod{100}$

Từ đây suy ra hai chữ số sau cùng của 9^k bằng hai chữ số sau cùng của 9^p. Ta được : $9^9 = \ldots 89 = 10 . n + 9$

$$9^{9^9} = 9^{10n + p} \equiv 9^9 \pmod{100}.$$

Vậy hai chữ số sau cùng của 9^{9^9} là hai chữ số sau cùng của 9^9 và bằng 89.

Bài 138

Tìm số dư khi chia :

a) 30^{40} cho 83;   b) 2^{1000} cho 25;   c) 4362^{4362} cho 11.

GỢI Ý :

a) $3^4 \equiv 81 \equiv -2 \pmod{83}$

b) $2^5 \equiv 7$; $2^{20} \equiv 7^2 \equiv -1 \pmod{25}$

c) $4362^2 \equiv 3$; $4362^5 \equiv -1 \pmod{11}$

Bài 139

Chứng minh rằng : $2222^{5555} + 5555^{2222} \vdots 7$

GỢI Ý :

$2222 \equiv 3 (\text{mod} 7)$, $2222^4 \equiv 3^4 \equiv 4 \pmod 7$

$2222^5 \equiv 4 . 3 \equiv 5 \pmod 7$; $5555 \equiv 4 \pmod 7$

$5555^2 \equiv 4^2 \equiv 2 \pmod 7$

$2222^{5555} + 5555^{2222} = 2222^{5.1111} + 5555^{2.1111} \equiv 5^{1111} + 2^{1111} \pmod 7$

Mà : $5^{1111} + 2^{1111}$ chia hết cho 5 + 2

Bài 140

Chứng minh rằng :

a) $7^{70} + 3^{70}$ chia hết cho 13;

b) $1890^{1930} + 1945^{1975} + 1$ chia hết cho 7.

Bài 141

Một lớp gồm 40 học sinh đứng thành vòng tròn và quay mặt vào trong vòng tròn để chơi bóng. Mỗi học sinh nhận được bóng phải ném bóng qua mặt 6 bạn đứng ở tay trái của mình. Chứng minh rằng tất cả học sinh trong lớp đều nhận được bóng ném tới mình sau 40 lần ném bóng liên tiếp.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II miền Bắc 1973)

GIẢI

Ta cho mỗi học sinh mang một số từ 0 đến 39: em đầu tiên nhận bóng mang số 0; em đứng ngay bên trái của em này mang số 1; tiếp ngay bên trái của em mang số 1 là em mang số 2... cho đến em số 39 ở ngay bên phải em mang số 0.

Như vậy :

Em nhận bóng đầu tiên mang số 0 (= 7.0)

Sau lần ném thứ 1, em nhận bóng mang số 7 (= 7.1)

Sau lần ném thứ 2, em nhận bóng mang số 14 (= 7.2)

...

Sau lần ném thứ năm, em nhận bóng mang số 35 (= 7.5)

Sau lần ném thứ 6, em nhận bóng mang số

$$7.6 = 42 \equiv 2 \pmod{40}$$ tức là mang số 2.

Sau lần ném thứ 7, em nhận bóng mang số

$$7.7 = 49 \equiv 9 \pmod{40}$$ tức là số 9

Sau lần ném thứ x, em nhận bóng mang số b thỏa mãn :

$$7x \equiv b \pmod{40}$$
$$0 \le b < 40$$

Khi x lấy 40 *giá trị khác nhau từ* 0 đến 39 thì 7x lấy 40 giá trị khác nhau, lúc đó b *cũng nhận* 40 *giá trị khác nhau từ 0 đến 39* (chỉ khác thứ tự so với x).

Thật vậy, nếu b lấy hai giá trị bằng nhau b_1 và b_2 :

$$b_1 = b_2 \quad (0 \le b_1, b_2 < 40)$$

thì từ $7x_1 \equiv b_1 \pmod{40}$

$7x_2 \equiv b_2 \pmod{40}$

ta sẽ có $7x_1 \equiv 7x_2 \pmod{40}$

$7(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{40}$ (1)

Mà *7 nguyên tố với* 40, nên ta có : $(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{40}$

Với x_1, x_2 là hai giá trị của x từ 0 đến 39, ta suy ra $x_1 = x_2$, trái với giả thiết đây là những giá trị khác nhau của x.

Chú ý rằng nếu học sinh ném bóng qua mặt chỉ 5 bạn thì đồng dư thức (1) sẽ trở thành : $6(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{40}$ do $(6, 40) \neq 1$ nên không suy ra được $x_1 = x_2$

Bạn hãy xét xem trong trường hợp này, những em nào *không bao giờ* nhận được bóng ?

Bài 142

Tìm tất cả các số tự nhiên n để $2^n - 1$ chia hết cho 7.

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì : $2^n + 1$ không chia hết cho 7.

(Đề thi vô địch toán quốc tế, 1964)

GỢI Ý :

a) $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod 7$

$2^{3k} \equiv 1 \pmod 7$. Số n phải tìm là bội số của 3.

b) $2^{3k} + 1 \equiv 1 + 1 \pmod 7$

$2^{3k+1} \equiv 2 . 1 \pmod 7 \Rightarrow 2^{3k+1} + 1 \equiv 3 \pmod 7$; $2^{3k+2} \equiv 2 . 2 \pmod 7$

$\Rightarrow 2^{3k+2} + 1 \equiv 5 \pmod 7$

Với mọi n (3k, 3k + 1, 3k + 2), $2^n + 1$ đều không chia hết cho 7

3. Định lí Fermat

Trước hết, ta giải bài toán sau đây :

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n:

a) $n^2 - n$ *chia hết cho 2*

b) $n^3 - n$ *chia hết cho 3*

c) $n^5 - n$ *chia hết cho 5.*

Bài toán này có thể giải dễ dàng bằng cách phân tích $n^2 - n$, $n^3 - n$, $n^5 - n$ *thành nhân tử :*

a) $n^2 - n = n(n - 1)$

b) $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$

c) $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$

Ta gặp lại bài toán đã giải : bài 108, 109 ($n^2 - n$ *chia hết cho 2 và* $n^3 - n$ *chia hết cho 3) và bài 106.*

Cần chú ý rằng nếu như với mọi số nguyên n, $n^2 - n \vdots 2$, $n^3 - n \vdots 3$ *và* $n^5 - n \vdots 5$, *thì số* $n^4 - n$ không luôn chia hết *cho 4, ví dụ : với* $n = 2$ *thì* $n^4 - 2 = 14$ *không chia hết cho 4.*

Các số 2, 3, 5 là các số nguyên tố *và bài toán ta vừa nêu lên là trường hợp riêng của định lí sau đây :*

Định lí Fermat

Nếu p là số nguyên tố thì $n^p - n$ *chia hết cho p với mọi số nguyên n*

$$n^p \equiv n \pmod p,\ p \text{ nguyên tố}$$

(P. Fermat (Phecma, 1601–1655), nhà toán học Pháp).

Ví dụ : $n^3 \equiv n \pmod 3$; $n^5 \equiv n \pmod 5$

$n^7 \equiv n \pmod 7$; $n^{11} \equiv n \pmod{11}$

Định lí Fermat *có thể viết dưới dạng khác :*

$$n^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p),\ p \text{ nguyên tố}$$

(với mọi n không phải là bội của p)

Trong trường hợp p = 2, 3, có thể chứng minh định lí bằng cách phân tích $n^p - n$ ra thừa số, như ta đã làm. Nhưng rõ ràng là không thể áp dụng cách chứng minh này cho số nguyên tố p bất kì.

Cách chứng minh sau đây với p = 5 có thể áp dụng cho trường hợp tổng quát.

– Nếu n chia hết cho 5 thì hiển nhiên $n^5 - n$ chia hết cho 5.

– *Xét* n không chia hết cho 5.

Lúc đó 2n, 3n, 4n cũng đều không chia hết cho 5.

Chia bốn số n, 2n, 3n, 4n cho 5, ta có 4 số dư đôi một khác nhau (vì nếu có hai số, thí dụ 4n và n cho cùng số dư thì 4n – n = 3n sẽ chia hết cho 5), mỗi số dư lấy một trong bốn giá trị : 1, 2, 3, 4.

Ta có :

$$n \equiv a \ (mod\ 5) \qquad (0 < a < 5)$$
$$2n \equiv b \ (mod\ 5) \qquad (0 < b < 5)$$
$$3n \equiv c \ (mod\ 5) \qquad (0 < c < 5)$$
$$4n \equiv d \ (mod\ 5) \qquad (0 < d < 5)$$

a, b, c, d đôi một khác nhau mà mỗi số lấy một trong bốn giá trị 1, 2, 3, 4 thế thì phải có.

$$abcd = 1.2.3.4$$

Chú ý đến đẳng thức này, nhân từng vế bốn đồng dư thức ở trên, ta được :

$$n \,.\, 2n \,.\, 3n \,.\, 4n \equiv a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \ (mod\ 5)$$

$$1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, n^4 \equiv 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ (mod\ 5)$$

Chia hai vế cho 1 . 2 . 3 . 4 nguyên tố với 5, được :

$$n^4 \equiv 1 \pmod 5$$

Nhân hai vế với n, ta có điều phải chứng minh :

$$n^5 \equiv n \pmod 5$$

Ghi chú : Định lí này thường được gọi là *định lí nhỏ Fermat*, phân biệt với một định lí khác là *định lí lớn Fermat*. (Xem *Để học tốt Toán 9 – Đại số*).

Bài 143

Tìm số gồm toàn chữ số 9 và chia hết cho :

3 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17.

GIẢI

Chú ý rằng các số 3, 7, 11, 13, và 17 đều là các số nguyên tố, áp dụng định lí Fermat :

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod p, \text{ p nguyên tố}$$

Với n không chia hết cho p, ta có :

$$10^{3-1} \equiv 1 \pmod 3 \Rightarrow 10^2 - 1 \equiv 0 \pmod 3$$

99 chia hết cho 3.

$$10^{7-1} \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 10^6 - 1 \equiv 0 \pmod 7$$

Số 999999 chia hết cho 7.

$$10^{11-1} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{10} - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

Số 9999999999 chia hết cho 11.

Tương tự như vậy :

Số gồm toàn 12 chữ số 9 chia hết cho 13;

Số gồm toàn 16 chữ số 9 chia hết cho 17;

Số gồm toàn p – 1 chữ số 9 chia hết cho p nguyên tố.

Cần lưu ý rằng các số tìm được trên đây không phải bao giờ cũng là *số nhỏ nhất* có tính chất đó, ví dụ :

$10 - 1 = 9$ chia hết cho 3;

$100 - 1 = 99$ chia hết cho 11.

Bài 144

Chứng minh rằng biểu thức : $A = 8n^8 - n^2 + 7$ chia hết cho 7 với mọi số nguyên n.

GỢI Ý :

$A = 8n^8 - 8n^2 + 7n^2 + 7 = 8n(n^7 - n) + 7(n^2 + 1)$

Bài 145

Chứng minh rằng nếu a + b + c chia hết cho 30 thì $a^5 + b^5 + c^5$ chia hết cho 30.

GỢI Ý :

Chú ý rằng 30 = 2 . 3 . 5

$a^2 \equiv a \pmod 2 \quad \Rightarrow a^4 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2$

$\Rightarrow a^5 \equiv a^2 \equiv a \pmod 2$

$b^3 \equiv b \pmod 3 \quad \Rightarrow b^5 \equiv b^3 \equiv b \pmod 3$

$c^5 \equiv c \pmod 5$

Suy ra : $a^5 + b^5 + c^5 \equiv a + b + c \pmod{2 . 3 . 5}$.

Bài 146

Chứng minh rằng : $1^{30} + 2^{30} + ... + 10^{30} + 11^{30}$ không chia hết cho 11.

GỢI Ý :

$a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, do đó $a^{30} \equiv 1 \pmod{11}$, với mọi a = 1, 2, ..., 10.

Bài 147

Tìm số dư trong phép chia 3^{100} cho 13.

GỢI Ý :

$3^{12} \equiv 1 \pmod{13}$

$100 = 12 . 8 + 4$; $3^{100} = (3^{12})^8 . 3^4 \equiv 3^4 \pmod{13}$

$3^4 = 81 \equiv 3 \pmod{13}$

Bài 148

Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p đều có vô số số có dạng $2^n - n$ ($n \in N$) chia hết cho p.

(Đề thi vô địch toán Canada, 1983)

GIẢI

Nếu p = 2 thì mỗi số có dạng $2^{2k} - 2k$, với $k \in N$, chia hết cho p.

Nếu p > 2, theo định lí Fermat, ta có : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, do đó $2^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$, $m \in N$

Xét $A = 2^{m(p-1)} - m(p-1)$

$= 2^{m(p-1)} + m - mp$

A sẽ chia hết cho p nếu lấy m = kp − 1.

Như vậy, nếu p > 2, mỗi số có dạng $2^n - n$, trong đó $n = (kp - 1)(p - 1)$, $k \in N$, đều chia hết cho p, (đpcm).

4. Định lí Euler

Euler (Ơle, 1707 – 1783) đã mở rộng định lí Fermat cho trường hợp modun m bất kì và có định lí sau đây :

Nếu m là số nguyên dương bất kì và φ (m) là số các số dương nhỏ hơn m và nguyên tố với m thì : $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ với mọi số nguyên a nguyên tố với m.

(Về Euler, xem Để học tốt Toán 9 – Hình học)

Ví dụ 1

Cho m = 8, có tất cả 4 số dương nhỏ hơn 8 và nguyên tố với 8 (đó là 1, 3, 5 và 7), nghĩa là φ (8) = 4.

Áp dụng định lí Euler, ta có :

$a^4 \equiv 1 \pmod{8}$, với mọi a nguyên tố với 8.

Chú ý rằng : 8 = 2^3, nên a nguyên tố với 8 tức là a không chia hết cho 2. Do đó, kết quả trên có thể phát biểu :

$a^4 - 1$ *chia hết cho 8,* với mọi số a lẻ

Ví dụ 2

Cho m = 15. Có tất cả 8 số dương nhỏ hơn 15 và nguyên tố với 15 (đó là 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 và 14).

Áp dụng định lí Euler, ta có :

$a^8 \equiv 1 \pmod{15}$ với mọi a nguyên tố với 15.

(15 = 3.5, nên a nguyên tố với 15 tức là a không phải là bội của 3, cũng không là bội của 5).

Ví dụ 3

Cho m là số nguyên tố p. Có tất cả p – 1 số nhỏ hơn p và nguyên tố với p (đó là mọi số dương nhỏ hơn p).

Áp dụng định lí Euler, ta có :

$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, với a không chia hết cho p.

Đó chính là nội dung của định lí Fermat, nghĩa là : định lí Fermat là trường hợp riêng của định lí Euler khi m là số nguyên tố.

Công thức tính giá trị của φ(m)

Khi m nhỏ, có thể liệt kê các số dương nhỏ hơn m và nguyên tố với m để biết giá trị của φ(m), như ta đã làm với m = 8, m = 15. Tổng quát, ta tính φ(m) theo công thức sau đây :

Phân tích m ra thừa số nguyên tố :

$$m = p^{\alpha} . q^{\beta} \dots v^{\lambda}$$

Thế thì : $\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{v}\right)$

Ví dụ :

$m = 9 = 3^3 \quad \Rightarrow \varphi(9) = 9\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 6$

$m = 12 = 2^2 . 3 \quad \Rightarrow \varphi(12) = 12 . \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$

$m = 15 = 3 . 5 \quad \Rightarrow \varphi(15) = 15 . \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 8$

Bài 149

Chứng minh rằng trong các số tự nhiên thế nào cũng có số k sao cho $1983^k - 1$ chia hết cho 10^5.

(Đề thi học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1983)

Ta đã giải bài toán này bằng cách dùng nguyên tắc Dirichlet (bài 121). Sau đây là cách giải khác, dùng định lí Euler.

GIẢI

Vì 1983 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5, còn $10^5 = 2^5 . 5^5$, nên 1983 và 10^5 nguyên tố cùng nhau, do đó áp dụng định lí Euler ta có :

$$1983^{\varphi(10^5)} \equiv 1 \pmod{10^5}$$

Mà $\varphi(10^5) = 10^5\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 4 \,.\, 10^4$

nghĩa là ta có : $1983^{4.10^4} \equiv 1 \pmod{10^5}$

Số $4 \,.\, 10^4$ là số k cần tìm.

Chú ý rằng : *với định lí Euler* ta chỉ ra được rằng số k = 40 000 thỏa mãn điều kiện của bài toán. Còn nếu dùng *nguyên tắc Dirichlet*, tức là *chứng minh bằng phản chứng*, chúng ta chỉ chứng tỏ được rằng phải có một số k thỏa mãn yêu cầu đề ra (không có số k đó thì vô lí) chứ *không chỉ ra được cụ thể số k đó bằng bao nhiêu* (đó chính là một đặc điểm của phép chứng minh bằng phản chứng).

CHƯƠNG II

PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ TÍNH CHẤT

1. Khái niệm

Một phân thức đại số là biểu thức $\frac{A}{B}$ trong đó A và B là các đa thức với $B \neq 0$. Đa thức A là tử thức, B là mẫu thức. Tập xác định của phân thức $\frac{A}{B}$ là tập hợp tất cả các giá trị của biến làm cho B lấy giá trị khác 0.

2. Tính chất cơ bản

Nếu A, B, M là các đa thức với B, $M \neq 0$ thì

$$\frac{A}{B} = \frac{A.M}{B.M} \left(= \frac{A:M}{B:M} \text{ nếu A và B chia hết cho M} \right)$$

Đặc biệt $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}$; $\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$

3. Rút gọn phân thức

Chia tử và mẫu thức của một phân thức cho một nhân tử chung của chúng gọi là rút gọn phân thức đó. Phân thức mà tử thức và mẫu thức không có nhân tử chung gọi là phân thức tối giản.

4. Quy đồng mẫu thức.

Biến đổi các phân thức có mẫu thức khác nhau thành các phân thức có cùng mẫu thức và bằng các phân thức tương ứng đã cho gọi là quy đồng mẫu thức các phân thức đó.

Bài 150

Cho các phân thức đại số :

a) $\dfrac{9 - 4x^2}{36y^2 - 25}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$

1/ Tìm tập xác định của các phân thức trên.

2/ Tìm các giá trị của biến x để các phân thức trên bằng 0.

GIẢI

a)– Tập xác định của phân thức là tập các giá trị của y làm cho : $36y^2 - 25 \neq 0 \Leftrightarrow (6y - 5)(6y + 5) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq \pm\dfrac{5}{6}$

TXĐ = $\{y \mid y \in Q, y \neq \pm\dfrac{5}{6}\}$

– Những giá trị của biến x để phân thức bằng 0 là những giá trị của biến để tử thức bằng 0 và mẫu thức khác 0, nghiệm của phương trình :

$$9 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow (3 - 2x)(3 + 2x) = 0$$

cho ta : $x = \pm\dfrac{3}{2}$

b) $x^2 + 2x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

TXĐ = $\{ x \mid x \in Q, x \neq -1\}$

$\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = 0$ khi và chỉ khi : $x^2 - 1 = 0$ và $x \neq -1$

$x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$x = -1$ bị loại, chỉ có $x = 1$ là giá trị của biến để phân thức nhận giá trị 0.

Bài 151

Tìm tập xác định của các phân thức :

a) $\dfrac{2x+1}{x^2-5x+6}$; **b)** $\dfrac{x+5}{x^2+x+7}$; **c)** $\dfrac{x+y}{(x+3)^2+(y-2)^2}$

Đáp số :

a) $x \neq 2, x \neq 3$

b) $x^2 + x + 7 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + 6\dfrac{3}{4} > 0$ với mọi $x \in Q$, nên :

TXĐ = $\{x \mid x \in Q\}$

Người ta cũng nói : Phân thức xác định với mọi $x \in Q$.

c) Cặp số $x = -3$, $y = 2$ làm cho mẫu thức bằng 0 nên tập xác định của phân thức là :

TXĐ = $\{(x, y) \mid x \in Q, y \in Q; x \neq -3, y \neq 2\}$

Chú ý : Phân thức không xác định khi và chỉ khi xảy ra $x = -3$ đồng thời $y = 2$.

Bài 152

Cho các phân thức :

a) $\dfrac{x^2-4}{x^2+3x-10}$ **b)** $\dfrac{x^3-16x}{x^3-3x^2-4x}$ **c)** $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-3}$

1. Tìm các giá trị của x làm cho biểu thức vô nghĩa;

2. Tìm các giá trị của x để các phân thức nhận giá trị 0.

GỢI Ý :

+ Tìm các nghiệm của mẫu thức để có được các giá trị của biến mà tại đó phân thức không xác định.

+ Tìm các nghiệm của tử thức, sau đó loại đi nghiệm nào trùng với giá trị của biến làm cho mẫu thức bằng 0.

Trong các bài toán chỉ yêu cầu tìm các giá trị của biến để phân thức nhận giá trị 0, ta có thể giải như sau :

+ Tìm các nghiệm của tử thức.

+ Thay các nghiệm này vào mẫu thức và chỉ nhận các giá trị của biến làm cho mẫu thức khác 0.

Chẳng hạn như trong bài c) trên đây, ta tìm các nghiệm của tử thức :

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$x = \pm 1$$

* Với $x = 1$ thì mẫu thức $x^3 + 2x - 3$ có giá trị bằng 0; giá trị $x = 1$ bị loại

* Với $x = -1$ thì mẫu thức $x^3 + 2x - 3$ có giá trị bằng $-6 \neq 0$.

Vậy $x = -1$ là giá trị của biến để phân thức nhận giá trị là 0.

Đáp số :

a) 1/ $x = 2$; $x = -5$ 2/ $x = -2$

b) 1/ $x = 0$; $x = -1$; $x = 4$ 2/ $x = -4$

c) 1/ $x = 1$ 2/ $x = -1$

Bài 153

Chứng minh các đẳng thức sau :

a) $\dfrac{3y}{4} = \dfrac{6xy}{8x}$ **$(x \neq 0)$;**

b) $\dfrac{x + y}{3a} = \dfrac{3a(x + y)^2}{9a^2(x + y)}$ **với $a \neq 0$, $x \neq -y$**

GIẢI

a) Với $x \neq 0$ thì $2x \neq 0$. Theo tính chất của phân thức, ta có :

$$\frac{3y}{4} = \frac{3y \cdot 2x}{4 \cdot 2x} = \frac{6xy}{8x}$$

b) Với $a \neq 0$ và $x \neq -y$ thì ta có $3a\,(x + y) \neq 0$. Vậy :

$$\frac{x + y}{3a} = \frac{(x + y) \cdot 3a(x + y)}{3a \cdot 3a(x + y)} = \frac{3a(x + y)^2}{9a^2(x + y)}$$

Bài 154

Với những giá trị nào của biến thì hai phân thức sau đây bằng nhau :

$$\frac{x-2}{x^2-5x+6} \text{ và } \frac{1}{x-3}$$

Bài 155

Cho hai phân thức : $\frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}$ **và** $\frac{x-2}{3}$

Hãy xét sự bằng nhau của hai phân thức trong các trường hợp sau :

a) Biến x thuộc tập hợp N.

b) Biến x thuộc tập hợp Z.

c) Biến x thuộc tập hợp Q.

GỢI Ý :

a) Khi $x \in N$ thì hai phân thức bằng nhau;

b) Khi $x \in Z$ thì hai phân thức bằng nhau;

c) Khi $x \in Q$ thì hai phân thức bằng nhau với điều kiện $x \neq \frac{-1}{2}$

Bài 156

Cho ba phân thức đại số :

$$\frac{x+1}{5} ; \frac{(x+1)(x+2)}{5(x+2)} ; \frac{(x+1)(3x-2)}{5(3x-2)}$$

Hãy xét sự bằng nhau của chúng khi :

a) Biến x nhận các giá trị trong tập Q;

b) Biến x chỉ nhận các giá trị trong tập Z;

c) Biến x chỉ nhận những giá trị trong tập N ?

Bài 157

Cho $x > y > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x-y}{x+y} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

GIẢI

Do $x > y > 0$ nên $x + y \neq 0$. Theo tính chất cơ bản của phân thức ta có :

$$\frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{(x+y)(x+y)} = \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \quad (1)$$

Mặt khác, do $x, y > 0$ nên $x^2 + 2xy + y^2 > x^2+y^2$

Vậy : $$\frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra : $\dfrac{x-y}{x+y} < \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Bài 158

Trong hai số sau đây, số nào lớn hơn :

$$\frac{1981-1980}{1981+1980} \text{ và } \frac{1981^2-1980^2}{1981^2+1980^2}$$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên Toán Hà Nội, 1980)

Bài 159

Rút gọn phân thức :

a) $\dfrac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$

b) $\dfrac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$

GIẢI

a) $\dfrac{(a+b)^2 - c^2}{a+b+c} = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{a+b+c} = a+b-c$

b) $\dfrac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{a^2 - b^2 + c^2 + 2ac} = \dfrac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}$

$$= \dfrac{(a+b)^2 - c^2}{(a+c)^2 - b^2} = \dfrac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+c+b)(a+c-b)}$$

$$= \dfrac{a+b-c}{a-b+c}$$

Nhận xét : Muốn rút gọn một phân thức, ta phân tích tử và mẫu của phân thức thành nhân tử rồi đơn giản các nhân tử chung.

Bài 160

Rút gọn phân thức

a) $P = \dfrac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$

b) $Q = \dfrac{2x^3 - 7x^2 - 12x + 45}{3x^3 - 19x^2 + 33x - 9}$

GỢI Ý :

a) Phân tích tử thức và mẫu thức thành nhân tử bằng cách tách :

$c - a = c - b + b - a$ ở tử thức

và nhóm các hạng tử $(ab^2 - b^3) + (bc^2 - ac^2)$ ở mẫu thức.

$$P = \dfrac{(a-b)(b-c)(a-c)}{(a-b)(b-c)(b+c)} = \dfrac{a-c}{b+c}$$

b) Tử thức viết thành $(2x^3 - 6x^2) - (x^2 - 3x) - (15x - 45)$

Mẫu thức viết thành $(3x^3 - 9x^2) - (10x^2 - 30x) + 3x - 9$

Đáp số : $Q = \dfrac{2x+5}{3x-1}$

Bài 161

Rút gọn các phân thức

a) $P = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$

b) $Q = \dfrac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$

GỢI Ý :

a) Xem bài 56. *Đáp số* : $P = \dfrac{x+y+z}{2}$

b) So sánh Q với P ta thấy trong P nếu thay y bởi $-y$ ta được Q, sử dụng kết quả trên ta được $Q = \dfrac{x-y+z}{2}$

Bài 162

Rút gọn phân thức : $\dfrac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$

(Đề thi học sinh giỏi Miền Bắc, 1970)

GỢI Ý :

Xem lại bài 56

Đáp số : a + b + c.

Bài 163

Rút gọn phân thức

$$\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{a^4(b^2-c^2) + b^4(c^2-a^2) + c^4(a^2-b^2)}$$

GỢI Ý :

– Tách $b^2(c - a)$ ở tử thức thành $b^2(c - b) + b^2(b - a)$ để phân tích tử thức thành $(a - b)(b - c)(a - c)$

– Chú ý rằng trong mẫu thức ta thay a^2 bởi a, b^2 bởi b và c^2 bởi c ta được tử thức. Do vậy mẫu thức có thể phân tích thành $(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(a^2 - c^2)$

Đáp số : $\dfrac{1}{(a+b)(b+c)(c+a)}$

Bài 164

Rút gọn phân thức : $A = \dfrac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + ... + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + ... + x^2 + 1}$

GỢI Ý :

Mẫu thức của A viết thành :

$$(x^{26} + x^{22} + x^{18} + ... + x^2) + (x^{24} + x^{20} + ... + 1)$$

$$= (x^{24} + x^{20} + x^{16} + ... + 1)(x^2 + 1)$$

Đáp số : $A = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

Bài 165

Chứng minh

a) Phân thức $P = \dfrac{a^2 - ab - 2b^2}{a^2 + 5ab + 6b^2}$ **là tối giản**

b) Phân thức $Q = \dfrac{x^7 + x^2 + 1}{x^8 + x + 1}$ **không tối giản**

GỢI Ý :

a) Phân tích tử và mẫu thức của P thành nhân tử để thấy chúng không có nhân tử chung.

b) Để phân tích tử và mẫu thức của Q hãy viết

$x^7 + x^2 + 1 = x^7 - x + x^2 + x + 1$

$= x(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1$

$x^8 + x + 1 = x^8 - x^2 + x^2 + x + 1$

$= x^2(x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 + x + 1$

Như vậy tử và mẫu thức có nhân tử chung là một đa thức bậc lớn hơn không, nên Q không tối giản.

Bài 166

Tìm giá trị của biến x để

a) $P = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 6}$ **đạt giá trị lớn nhất**

b) $Q = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ **đạt giá trị nhỏ nhất.**

GIẢI

a) $P = \dfrac{1}{x^2 + 2x + 6} = \dfrac{1}{(x + 1)^2 + 5}$

Tử thức của P là hằng số dương nên P đạt giá trị lớn nhất khi mẫu thức của nó nhận giá trị nhỏ nhất. Vì $(x + 1)^2 + 5 \geq 5$ với mọi x và $(x + 1)^2 + 5$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 khi $x + 1 = 0$ $\Leftrightarrow x = -1$

Vậy P đạt giá trị lớn nhất MaxP $= \dfrac{1}{5}$ khi $x = -1$

b) $Q = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \dfrac{(x + 1)^2 - x}{(x + 1)^2} = 1 - \dfrac{x}{(x + 1)^2} = 1 - \dfrac{x + 1}{(x + 1)^2} +$

$+ \dfrac{1}{(x + 1)^2} = 1 - \dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{(x + 1)^2} = \left(\dfrac{1}{x + 1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$

Suy ra Q đạt giá trị nhỏ nhất khi x lấy giá trị sao cho $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} = 0$ tương ứng x = 1. Vậy Q đạt giá trị nhỏ nhất $\text{MinQ} = \frac{3}{4}$ khi x = 1

Bài 167

Chứng minh rằng phân thức sau đây không phụ thuộc vào x và có nghĩa với mọi giá trị của x và của a.

$$A = \frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$$

(Thi học sinh giỏi Hà Nội 1981)

GIẢI

Ta có :

$$(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1 = x^2 + ax^2 + a + a^2 + a^2x^2 + 1$$
$$= x^2(a^2 + a + 1) + a^2 + a + 1$$
$$= (a^2 + a + 1)(x^2 + 1)$$

Tương tự ta có :

$$(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(x^2 + 1)$$

Vì $(x^2 + 1) \neq 0$, nên $A = \frac{a^2 + a + 1}{a^2 - a + 1} = \frac{a^2 + a + 1}{\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$

Biểu thức của A không phụ thuộc x và mẫu thức

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

Với mọi giá trị của a, nên A có nghĩa với mọi giá trị của x và a.

Bài 168

Cho $P = \dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$

Tìm các giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên

GIẢI

$$P = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^4 - 16 - (4x^3 - 8x^2) - (16x - 32)} = \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^3 - 2x^2 + 4x - 8)}$$

$$= \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)^2(x^2+4)} = \frac{x+2}{x-2} = 1 + \frac{4}{x-2}$$

Từ biểu thức $P = 1 + \dfrac{4}{x-2}$ ta thấy P nhận giá trị nguyên nếu cho biến x giá trị nguyên sao cho x − 2 chia hết 4, tức x − 2 phải lấy các giá trị ±1, ±2, ±4. Từ đó suy ra x phải lấy giá trị thuộc tập hợp M = {−2; 0, 1, 3, 4, 6}

Bài 169

Rút gọn các phân thức

a) $P = \dfrac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by}$

b) $Q = \dfrac{m^2 - 2mn - 3n^2}{m^2 - 4mn + 3n^2}$

Đáp số :

a) $P = \dfrac{x + c}{2x + y}$ b) $Q = \dfrac{m + n}{m - n}$

Bài 170

Chứng minh các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào biến x

a) $\frac{(x + a)^2 - x^2}{2x + a}$ b) $\frac{x^2 - y^2}{(x + y)(ay - ax)}$ c) $\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}$

GỢI Ý :

Rút gọn các biểu thức đã cho được các biểu thức không chứa x.

Bài 171

Quy đồng mẫu thức các phân thức

a) $\frac{2m}{m^3 - n^3}$ và $\frac{2n^2}{m^2 - n^2}$

b) $\frac{a - d}{a^2 + ab + ad + bd}$ và $\frac{a + d}{a^2 + ab - ad - bd}$

GIẢI

a) $\frac{2m}{m^3 - n^3} = \frac{2m}{(m - n)(m^2 + mn + n^2)}$;

$\frac{2n^2}{m^2 - n^2} = \frac{2n^2}{(m - n)(m + n)}$

Mẫu thức chung là tích các nhân tử chung và riêng của các mẫu thức trên

$$MTC = (m - n)(m + n)(m^2 + mn + n^2).$$

Chia mẫu thức chung cho mẫu thức thứ nhất ta được nhân tử phụ là m + n

Do đó $\frac{2m}{m^3 - n^3} = \frac{2m(m + n)}{(m^3 - n^3)(m + n)} = \frac{2m^2 + 2mn}{m^4 - mn^3 + nm^3 - n^4}$

Chia mẫu thức chung cho mẫu thức thứ hai được nhân tử phụ là $m^2 + mn + n^2$ nên

$$\frac{2n^2}{m^2 - n^2} = \frac{2n^2(m^2 + mn + n^2)}{(m^2 - n^2)(m^2 + mn + n^2)} = \frac{2(m^2n^2 + mn^3 + n^4)}{m^4 - mn^3 + nm^3 - n^4}$$

Vậy các phân thức sau khi đã quy đồng mẫu thức là

$$\frac{2m^2 + 2mn}{m^4 - mn^3 + nm^3 - n^4} \text{ và } \frac{2(m^2n^2 + mn^3 + n^4)}{m^4 - mn^3 + nm^3 - n^4}$$

b) Làm như câu a)

Mẫu thức chung (MTC) : $(a + b)(a + d)(a - d)$

Các phân thức sau khi quy đồng mẫu thức là :

$$\frac{(a - d)^2}{(a + b)(a^2 - d^2)} \text{ và } \frac{(a + d)^2}{(a + b)(a^2 - d^2)}$$

Bài 172

Quy đồng mẫu thức các phân thức

a) $\frac{x}{x^2 - 2xy + y^2 - z^2}$; $\frac{y}{x^2 - y^2 + 2yz - z^2}$; $\frac{z}{x^2 - 2xz - y^2 + z^2}$

b) $\frac{x}{2x^2 + 7x - 15}$; $\frac{x + 2}{x^2 + 3x - 10}$; $\frac{1}{x + 5}$;

c) $\frac{1}{-x^2 + 3x - 2}$; $\frac{1}{x^2 + 5x - 6}$; $\frac{1}{-x^2 + 4x - 3}$

GỢI Ý :

a) MTC = $(x - y + z)(x + y - z)(x - y - z)$

b) MTC = $(2x - 3)(x + 5)(x - 2)$

c) MTC = $(x - 1)(2 - x)(3 - x)(x + 6)$

§2. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN PHÂN THỨC

1. Muốn cộng các phân thức, ta quy đồng mẫu thức rồi cộng các tử thức với nhau và giữ nguyên mẫu thức của các phân thức đã quy đồng.

2. Hiệu của phân thức $\frac{A}{B}$ và phân thức $\frac{C}{D}$ là tổng của phân thức $\frac{A}{B}$ với phân thức đối của phân thức $\frac{C}{D}$

$$\frac{A}{B} - \frac{C}{D} = \frac{A}{B} + \left(-\frac{C}{D}\right)$$

3. Tích hai phân thức là phân thức có tử thức bằng tích các tử thức và mẫu thức là tích các mẫu thức của hai phân thức đã cho.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

4. Phân thức nghịch đảo của phân thức $\frac{A}{B} \neq 0$ là phân thức $\frac{B}{A}$, kí hiệu $\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$

5. Thương của phân thức $\frac{A}{B}$ và phân thức $\frac{C}{D} \neq 0$ là tích của phân thức $\frac{A}{B}$ với nghịch đảo của phân thức $\frac{C}{D}$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Bài 173

Thực hiện các phép tính

a) $\frac{x}{xy - y^2} + \frac{2x - y}{xy - x^2}$

b) $\frac{x^2}{x^2 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2}$

GIẢI

a) $xy - y^2 = y(x - y)$; $xy - x^2 = x(y - x)$

Mẫu thức chung là $xy(x - y)$

$$\frac{x}{xy - y^2} + \frac{2x - y}{xy - x^2} = \frac{x^2}{xy(x - y)} + \frac{-y(2x-y)}{xy(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{xy(x - y)} = \frac{(x - y)^2}{xy(x - y)} = \frac{x - y}{x.y}$$

b) $MTC = (x - 4)(2 - x)(x + 2) = (x - 4)(4 - x^2)$

$$\frac{x^2}{x^2 - 4x} + \frac{6}{6 - 3x} + \frac{1}{x + 2} =$$

$$= \frac{x(4 - x^2) + 2(x - 4)(x + 2) + (x - 4)(2 - x)}{(x - 4)(4 - x^2)}$$

$$= \frac{4x - x^3 + 2x^2 - 4x - 16 - x^2 + 6x - 8}{(x - 4)(4 - x^2)}$$

$$= \frac{-x^3 + x^2 + 6x - 24}{(x - 4)(4 - x^2)}$$

Bài 174

Thực hiện các phép tính

a) $\frac{2x + y}{2x^2 - xy} + \frac{16x}{y^2 - 4x^2} + \frac{2x - y}{2x^2 + xy}$

b) $\frac{1}{a - b} + \frac{3ab}{b^3 - a^3} + \frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$

c) $\frac{5}{a + 1} - \frac{10}{a - (a^2 + 1)} - \frac{15}{(a^3 + 1)}$

Gợi ý :

a) MTC : x(2x + y)(2x − y). *Đáp số :* $\frac{-2}{x}$

b) MTC : $b^3 - a^3$. *Đáp số :* $\frac{2(a-b)}{a^2+ab+b^2}$

c) MTC : $a^3 + 1$. *Đáp số :* $\frac{5a}{a^2-a+1}$

Bài 175

Thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$$

GIẢI

Nhận xét rằng nếu cộng hai hạng tử đầu rồi cộng kết quả với hạng tử tiếp theo và cứ tiếp tục như vậy sẽ nhanh hơn là quy đồng mẫu thức tất cả các phân thức.

Ta có : $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}=\frac{1+x+1-x}{1-x^2}=\frac{2}{1-x^2}$

$$\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2(1+x^2+1-x^2)}{1-x^4}=\frac{4}{1-x^4}$$

$$\frac{4}{1-x^4}+\frac{4}{1+x^4}=\frac{4(1+x^4+1-x^4)}{1-x^8}=\frac{8}{1-x^8}$$

$$\frac{8}{1-x^8}+\frac{8}{1+x^8}=\frac{8(1+x^8+1-x^8)}{1-x^{16}}=\frac{16}{1-x^{16}}$$

Vậy $A=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\ldots$

$$\ldots+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{16}{1-x^{16}}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}}$$

Bài 176

Chứng minh đẳng thức :

$$\frac{x^2y^2z^2}{a^2b^2} + \frac{(x^2 - a^2)(y^2 - a^2)(z^2 - a^2)}{a^2(a^2 - b^2)} + \frac{(x^2 - b^2)(y^2 - b^2)(z^2 - b^2)}{b^2(b^2 - a^2)} =$$

$$= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2$$

GỢI Ý :

Khai triển hạng tử thứ hai và hạng tử thứ ba ở vế trái rồi cộng các kết quả và rút gọn ta suy ra vế phải.

Bài 177

Phân tích phân thức sau đây : $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6}$

thành tổng của hai phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất.

GIẢI

Mẫu thức của phân thức trên đây có thể phân tích thành nhân tử : $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Ta tìm hai biểu thức A và B để có :

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2x - 1}{(x - 2)(x - 3)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 2}$$

Quy đồng mẫu thức ở vế phải, ta có :

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A(x - 2)+B(x - 3)}{(x - 2)(x - 3)}$$

Như vậy ta phải có :

$$2x - 1 = A(x - 2) + B(x - 3) \quad (*)$$

Vế trái của (*) là một nhị thức bậc nhất, vậy A, B phải là những hằng số.

Có hai cách để tìm A, B.

Cách 1 : (*) cho ta :

$$2x - 1 = (A + B)x - 2A - 3B$$

Đồng nhất hệ số các hạng tử cùng bậc ở hai vế ta được :

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ 2A + 3B = 1 \end{cases} \quad \text{Cho ta } A = 5,\ B = -3,$$

Vậy $\dfrac{2x - 1}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{5}{x - 3} - \dfrac{3}{x - 2}$

Cách 2 :

Trong (*), cho $x = 2$ thì $A(x - 2) = 0$, do đó tính được B; cho $x = 3$ thì $B(x - 3) = 0$ và tính được A :

$$x = 2 \Rightarrow 4 - 1 = A.0 + B(2 - 3) \Rightarrow B = -3$$

$$x = 3 \Rightarrow 6 - 1 = A(3 - 2) + B.0 \Rightarrow A = 5.$$

Bài 178

Phân tích các phân thức sau đây thành tổng các phân thức có mẫu thức là các nhị thức bậc nhất :

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)}$ **b)** $\dfrac{3x^2 + 3x + 12}{(x - 1)(x + 2)x}$

GỢI Ý :

a) Vận dụng phương pháp giải bài 177

$$x^2 + 2x + 6 = A(x - 2)(x - 4) + B(x - 1)(x - 4) + C(x - 1)(x - 2)$$

$x = 1 \Rightarrow A = 3;$ $x = 2 \Rightarrow B = -7;$ $x = 4 \Rightarrow C = 5.$

$$\frac{x^2 + 2x + 6}{(x - 1)(x - 2)(x - 4)} = \frac{3}{x - 1} - \frac{7}{x - 2} + \frac{5}{x - 4}$$

b) $\dfrac{3x^2 + 3x + 12}{(x - 1)(x + 2)x} = \dfrac{6}{x - 1} + \dfrac{3}{x + 2} - \dfrac{6}{x}$

Bài 179

Tìm các số A, B, C để có :

a) $\dfrac{x^2 - x + 2}{(x-1)^3} = \dfrac{A}{(x-1)^3} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-1}$

b) $\dfrac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{Bx + C}{x^2+1}$

GỢI Ý :

a) Đáp số : A = 2, B = 1, C = 1

b) Quy đồng mẫu thức ở vế phải :

$$x^2 + 2x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \quad (*)$$

Cho x = 1, ta được A = 1.

Thay A = 1 vào (*) và đồng nhất các hệ số ta có :

$$A + B = 1 \Rightarrow B = 0$$

$$-B + C = 2 \Rightarrow C = 2.$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2+1}$$

Bài 180

Tính các tổng :

a) $S_1 = \dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$;

b) $S_2 = \dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

GỢI Ý :

a) MTC : (a – b)(a – c (b – c); $S_1 = 0$

b) MTC : (a – b)(a – c)(b – c); $S_2 = 1$.

Bài 181

Chứng minh hằng đẳng thức :

$$\frac{a^2 + 3ab}{a^2 - 9b^2} + \frac{2a^2 - 5ab - 3b^2}{6ab - a^2 - 9b^2} = \frac{a^2 + an + ab + bn}{3bn - a^2 - an + 3ab}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp 2 Miền Bắc, 1962)

GỢI Ý :

Rút gọn vế phải, ta có kết quả : $\frac{a + b}{3b - a}$

Thực hiện các phép tính ở vế trái ta cũng được kết quả là $\frac{a + b}{3b - a}$.

Bài 182

Chứng minh rằng :

$$\frac{mbc + n}{(a - b)(a - c)} + \frac{mac + n}{(b - a)(b - c)} + \frac{mab + n}{(c - a)(c - b)} = m$$

Với n bất kì và a, b, c là ba số đôi một khác nhau.

GỢI Ý :

Hãy viết vế trái thành tổng :

$$m\left[\frac{bc}{(a - b)(a - c)} + \frac{ac}{(b - a)(b - c)} + \frac{ab}{(c - a)(c - b)}\right] + n\left[\frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)}\right]$$

Phải chứng minh hai đẳng thức :

$$\frac{bc}{(a - b)(a - c)} + \frac{ac}{(b - a)(b - c)} + \frac{ab}{(c - a)(c - b)} = 1$$

$$\frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{1}{(b - a)(b - c)} + \frac{1}{(c - a)(c - b)} = 0$$

Bài 183

Tính các tổng

a) $S_1 = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n}$

b) $S_2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

GIẢI

a) Ta có $\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

Cộng vế với vế các đẳng thức trên ta được đẳng thức mà vế trái là S_1 còn vế phải, sau khi đơn giản các hạng tử đối nhau ta được $1 - \frac{1}{n}$. Vậy $S_1 = 1 - \frac{1}{n}$.

b) *Cách 1.* Nhận xét rằng với số nguyên dương k bất kì ta có :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{k+1}$$

Cho k lần lượt bằng 1, 2, 3, ..., n ta được :

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+2}\right) - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n+2}\right) - $$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right)$$

$$S_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$S_2 = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Cách 2. Nhận xét rằng với số nguyên dương k ta có đẳng thức :

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$$

Cho k lần lượt bằng 1,2,3, ..., n ta được :

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right]$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right]$$

$$\frac{1}{3.4.5} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3.4} - \frac{1}{5.6}\right]$$

. . . .

. . . .

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$$

$$\Rightarrow S_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Bài 184

Thực hiện phép tính : $\dfrac{2m^3 - 16}{m + 2} \cdot \dfrac{3m + 6}{10 - 5m}$

GỢI Ý :

Phân tích các tử thức và mẫu thức thành nhân tử để rút gọn kết quả

$$\frac{2(m^3 - 2^3)}{m + 2} \cdot \frac{3(m + 2)}{-5(m - 2)} = -\frac{6}{5}(m^2 + 2m + 4)$$

Bài 185

Rút gọn các biểu thức :

a) $\left(x - \dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\right) \cdot \left(\dfrac{1}{y} + \dfrac{2}{x - y}\right)$; b) $\left(\dfrac{6a + 1}{a^2 - 6a} + \dfrac{6a - 1}{a^2 + 6a}\right) \cdot \dfrac{a^2 - 36}{a^2 + 1}$

GỢI Ý :

Thực hiện các phép tính trong các dấu ngoặc và phân tích ra nhân tử ta được .

a) $\dfrac{y(x - y)(x + y)}{y(x - y)(x + y)} = 1$

b) $\dfrac{(6a + 1)(a + 6) + (6a - 1)(a - 6)}{a(a - 6)(a + 6)} \cdot \dfrac{(a - 6)(a + 6)}{a^2 + 1} = \dfrac{12}{a}$

Bài 186

Thực hiện phép tính : $\dfrac{2ax - 4ay}{x^2 + 4xy + 4y^2} : \dfrac{4ay^2 - ax^2}{x^2 - 4xy + 4y^2}$

GỢI Ý :

Áp dụng quy tắc phép chia, phân tích tử và mẫu thức thành nhân tử; ước lược các nhân tử chung :

$$\frac{2a(x - 2y)}{(x + 2y)^2} \cdot \frac{(x - 2y)^2}{-a(x - 2y)(x + 2y)} = -\frac{2(x - 2y)^2}{(x + 2y)^3}$$

Bài 187

Tìm x : $\dfrac{a^2 + 2ab}{a - b}x = \dfrac{a^2 - 4b^2}{a^2 - ab}$

GỢI Ý :

$$x = \frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - ab} : \frac{a^2 + 2ab}{a - b} = \frac{(a + 2b)(a - 2b)}{a(a - b)} \cdot \frac{a - b}{a(a + 2b)}$$

Với $a \neq 0$, $a \neq b$, $a \neq -2b$

Ta có : $x = \dfrac{a - 2b}{a^2}$

§3. BIẾN ĐỔI ĐỒNG NHẤT CÁC BIỂU THỨC HỮU TỈ

Một biểu thức đại số chứa các phép cộng, trừ, nhân, chia các phân thức đại số được gọi là biểu thức hữu tỉ (nói riêng, đa thức, phân thức đại số cũng là biểu thức hữu tỉ).

Nhờ quy tắc của các phép tính, nhiều khi ta có thể biến đổi đồng nhất một biểu thức hữu tỉ thành một biểu thức đơn giản hơn (ta nói đã rút gọn biểu thức hữu tỉ đó).

Bài 188

Rút gọn biểu thức :

$$\left(\frac{2-n}{n-1}+4\frac{m-1}{m-2}\right):\left(n^2\frac{m-1}{n-1}+m^2\frac{2-n}{m-2}\right)$$

GỢI Ý :

$$A=\frac{2-n}{n-1}+4\frac{m-1}{m-2}=\frac{3mn-2m-2n}{(n-1)(m-2)}$$

$$B=n^2\frac{m-1}{n-1}+m^2\frac{2-n}{m-2}=\frac{(n-m)(-3mn+2m+2n)}{(n-1)(m-2)}$$

$$A:B=-\frac{1}{m-n}$$

Bài 189

Rút gọn và tính số trị của biểu thức sau, với $x=-1{,}76$ và $y=\frac{3}{25}$;

$$\left[\left(\frac{x-y}{2y-x}-\frac{x^2+y^2+y-2}{x^2-xy-2y^2}\right):\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}\right]:\frac{x+1}{2x^2+y+2}$$

(Đề thi học sinh giỏi toán cấp II Miền Bắc, 1963)

GỢI Ý :

Thực hiện theo các bước :

– Rút gọn biểu thức trong ngoặc (.) được :

$$\frac{2x^2+y-2}{(x+y)(2y-x)} \quad (1)$$

– Phân tích tử và mẫu thức của phân thức :

$$\frac{4x^4+4x^2y+y^2-4}{x^2+y+xy+x}=\frac{(2x^2+y-2)(2x^2+y+2)}{(x+1)(x+y)} \quad (2)$$

– Chia (1) cho (2), được :

$$\frac{x + 1}{(2y - x)(2x^2 + y + 2)} \qquad (3)$$

– Thực hiện phép chia cuối cùng, ta có : $\frac{1}{2y - x}$

Thay số, ta được kết quả : $\frac{1}{2}$

Bài 190

Giải phương trình :

$$(2 - x) : \left\{ \frac{m^2 - a^2}{m^3 + a^3} \left[\left(m - \frac{m^2 + a^2}{a} \right) : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{a} \right) \right] \right\} = 1$$

(Đề thi vào lớp 8 chuyên Toán, Hà Nội 1979)

GỢI Ý :

– Rút gọn các biểu thức trong ngoặc ( )

– Thực hiện tính chia trong [ ]

– Thực hiện tính nhân trong { } với chú ý là :

$$\frac{m^2 - a^2}{m^3 + a^3} = \frac{m - a}{m^2 - am + a^2}$$

– Đưa đến phương trình : $\frac{2 - x}{m} = 1 \Rightarrow x = 2 - m$

$m \neq 0,\ a \neq 0,\ m \neq -a$

Bài 191

Chứng minh đẳng thức

$$\frac{a^2(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)} = x^2$$

GỢI Ý :

Cách 1. Biến đổi vế trái bằng cách lấy mẫu thức chung là

$$(a - b)(a - c)(b - c)$$

Thực hiện phép tính, rút gọn ta được vế phải.

Cách 2. Đặt f(x) là biểu thức ở vế trái, và $g(x) = x^2$. Ta thấy

$$f(a) = a^2 = g(a); \quad f(b) = b^2 = g(b); \quad f(c) = c^2 = g(c)$$

f(x), g(x) đều là các đa thức bậc hai nhận giá trị bằng nhau tại nhiều hơn hai giá trị của biến số nên hai đa thức bằng nhau, tức vế trái bằng vế phải.

Bài 192

Rút gọn các biểu thức sau :

a) $\left(\dfrac{1}{a^2 - ab} - \dfrac{3b^2}{a^4 - ab^3} - \dfrac{b}{a^3 + a^2b + ab^2}\right) \cdot \left(b + \dfrac{a^2}{a + b}\right)$;

b) $\dfrac{2y^2 + 5y + 2}{2y^3 + 9y^2 + 12y + 4}$

(Đề thi chọn học sinh vào lớp chuyên toán, Hà Nội 1978)

GỢI Ý :

a) Trước hết thực hiện phép tính trong dấu ngoặc và thực hiện phép nhân :

$$\frac{a^2 - b^2}{a(a - b)(a^2 + ab + b^2)} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{1}{a}$$

b) Phân tích tử và mẫu thức ra nhân tử :

$$\frac{(2y + 1)(y + 2)}{(y^2 + 4y + 4)(2y + 1)} = \frac{1}{y + 2}$$

Bài 193

Cho đẳng thức :

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 \qquad (1)$$

Chứng minh rằng trong ba phân thức vế trái thì có hai phân thức bằng 1, và một phân thức bằng −1.

GIẢI

Đặt : $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = A, \ \frac{c^2+a^2 - b^2}{2ac} = B, \ \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = C$

Theo giả thiết : $A + B + C = 1$

Suy ra : $S = (A - 1) + (B - 1) + (C + 1) = 0$

$$A - 1 = \frac{(b - c - a)(b - c + a)}{2bc}$$

$$B - 1 = \frac{(a - c - b)(a - c + b)}{2ac}$$

$$C + 1 = \frac{(a + b + c)(a + b - c)}{2ab}$$

$$S = \frac{a + b - c}{2abc}[c(a + b + c) + b(a - c - b)+a(b - c - a)]$$

$$S = 0 \Rightarrow (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0$$

Có ba khả năng :

a) $a + b - c = 0 \Rightarrow A - 1 = B - 1 = C + 1 = 0$ (đpcm)

b) $b + c - a = 0$. Ta xét

$$S = (A + 1) + (B - 1) + (C - 1) = 0$$

Tương tự như trên, ta suy ra được :

$$A + 1 = B - 1 = C - 1 = 0 \text{ (đpcm)}$$

c) c + a − b = 0. Ta xét :

$$S = (A - 1) + (B + 1) + (C - 1) = 0.$$

và suy ra $A - 1 = B + 1 = C - 1 = 0$ (đpcm)

Bài 194

Chứng minh rằng từ đẳng thức : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$

ta suy ra được đẳng thức : $\frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$

với n là số tự nhiên lẻ.

GỢI Ý :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) = 0$$

$\Rightarrow$ a + b = 0 hoặc a + c = 0 hoặc b + c = 0

$a + b = 0 \Rightarrow a = -b \Rightarrow a^n = -b^n$ (n lẻ)

$$\Rightarrow \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} = a^n + b^n = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}$$

Bài 195

Chứng minh đẳng thức

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} + \frac{c-a}{(b-c)(b-a)} + \frac{a-b}{(c-a)(c-b)} = \frac{2}{a-b} + \frac{2}{b-c} + \frac{2}{c-a}$$

GỢI Ý :

$$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{a+b-a-c}{(a-b)(a-c)} = \frac{(b-a)+(a-c)}{(a-b)(a-c)} = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a-c}$$

Bài 196

Rút gọn biểu thức :

$$\frac{ax^2 + by^2 + cz^2}{bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2}$$

Với điều kiện $ax + by + cz = 0$.

GỢI Ý :

$$bc(y - z)^2 + ca(z - x)^2 + ab(x - y)^2$$
$$= (a + b + c)(ax^2 + by^2 + cz^2) - (ax + by + cz)$$

Bài 197

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương m, p, k ta có :

$$\frac{2}{k} = \frac{1}{mp} + \frac{1}{mk} + \frac{2mp - p - k}{mpk}$$

Trong trường hợp nào phân số $\frac{2}{k}$ (với $k > 2$) bằng tổng của hai hay ba phân số có tử bằng 1, đôi một khác nhau ? Cho một số ví dụ cụ thể.

GỢI Ý :

Xét trường hợp $2mp - p - k = 0$ hoặc $2mp - p - k = 1$.

Ví dụ : $k = 7, m = 4, p = 1$ $\Rightarrow \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$

$k = 19, m = 4, p = 3$ $\Rightarrow \frac{2}{19} = \frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}$

$k = 19, m = 10, p = 1$ $\Rightarrow \frac{2}{19} = \frac{1}{10} + \frac{1}{190}$

$k = 97, m = 8, p = 7$ $\Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}$

$k = 97, m = 49, p = 1$ $\Rightarrow \frac{2}{97} = \frac{1}{49} + \frac{1}{4753}$

Hãy xét tiếp các trường hợp $k = 3, 5, 9, 11$.

Bài 198

Chứng minh rằng, với mọi $m \in N$:

a) $\dfrac{4}{4m+2} = \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{(m+1)(2m+1)}$

b) $\dfrac{4}{4m+3} = \dfrac{1}{m+2} + \dfrac{1}{(m+1)(m+2)} + \dfrac{1}{(m+1)(4m+3)}$

c) $\dfrac{4}{8m+5} = \dfrac{1}{2(m+1)} + \dfrac{1}{2(m+1)(3m+2)} + \dfrac{1}{2(3m+2)(8m+5)}$

d) $\dfrac{4}{3m+2} = \dfrac{1}{m+1} + \dfrac{1}{3m+2} + \dfrac{1}{(m+1)(3m+2)}$

Ghi chú

Các đẳng thức trên có thể chứng minh dễ dàng, bằng cách cộng các phân thức ở vế phải, rồi rút gọn kết quả.

Cho m một giá trị là số tự nhiên bất kì, ví dụ $m = 1$, ta được :

a) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}$ b) $\dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{14}$

c) $\dfrac{4}{13} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{130}$ d) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{10}$

Các phân số ở vế phải đều có tử bằng 1.

Cách đây 2500 năm, người Ai Cập đã viết mọi phân số mà họ gặp, trừ phân số $\dfrac{2}{3}$, dưới dạng tổng của các phân số khác nhau, có tử bằng 1 (vì vậy, người ta cũng gọi phân số có dạng $\dfrac{1}{n}$, $n \in N$ và $n \neq 0$, là *phân số Ai Cập*).

Nhà toán học Hungari P. Erdös (1913-1996) đã đề ra bài toán : "Chứng minh rằng với mọi $n > 4$, phân số $\dfrac{4}{n}$ bằng tổng của ba phân số Ai cập khác nhau." Các đẳng thức a), b), c), d) cho lời giải của bài toán trong một số trường hợp riêng; lời giải tổng quát cho đến nay chưa ai tìm được (và cũng chưa tìm ra phản ví dụ để bác bỏ).

• P. ERDÖS



P. Erdös (1913–1996) là nhà toán học Hungari nổi tiếng trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt là về toán tổ hợp, lí thuyết graph, lí thuyết số.

Ông luôn đi tìm lời giải hay và sơ cấp của nhiều bài toán. Ngay lúc mới 18 tuổi, khi còn là sinh viên ở Budapest, Erdös đã tìm ra một chứng minh sơ cấp rất đẹp của định lí : "Giữa hai số n và 2n (với n bất kì ≥ 2) bao giờ cũng có ít nhất một số nguyên tố". Đây là bài toán được Bertrand đề ra năm 1845 và Chebychev chứng minh năm 1850, nhưng chứng minh của Chebychev phải dùng nhiều kiến thức toán học cao cấp. Trong nhiều lĩnh vực, người ta gặp "giả thuyết Erdös", "vấn đề Erdös", "bài toán Erdös" – trong đó nhiều giả thuyết chưa được chứng minh hay bác bỏ, nhiều bài toán chưa có lời giải.

Erdös đã được nhiều giải thưởng khoa học có giá trị, trong đó có giải thưởng Wolf với 50.000 đôla Mĩ. Phần lớn tiền thưởng cũng như tiền có được khi giảng ở các trường đại học, ông đã dành để giúp đỡ sinh viên hoặc trao giải thưởng cho người giải những bài toán mà ông đề ra.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

Bài 199

Tìm các giá trị nguyên của x để giá trị tương ứng của các biểu thức sau đây cũng là số nguyên :

a) $\dfrac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1}$ b) $\dfrac{x^3 - 2x^2 + 4}{x - 2}$

GIẢI

a) Chia tử thức cho mẫu thức, được thương là x^2 và dư là 2.

$$P(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{x - 1} = x^2 + \frac{2}{x - 1}$$

Khi cho x một giá trị nguyên thì x^2 là một số nguyên, do đó P(x) nhận giá trị nguyên khi và chỉ khi $\frac{2}{x-1}$ nhận giá trị nguyên, hay $x - 1$ là một ước số của 2, nghĩa là $x - 1 = \pm 1; \pm 2$. Ta có :

$x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P(0) = -2$

$x - 1 = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow P(2) = 6$

$x - 1 = -2 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0$

$x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow P(3) = 10$

b) $x = -2; 0; 3; 4; 6$

Bài 200

Tìm các giá trị nguyên của biến x để các biểu thức sau có giá trị nguyên :

a) $\frac{1}{x + 2}$; b) $\frac{-1}{2x + 3}$

Đáp số : a) −1; −3 b) −1; −2

Bài 201

Với giá trị nào của các biến thì biểu thức sau đây không xác định :

$$\frac{9y^2 - 12y + 4}{3xy - 18y - 2x + 12}$$

Với giá trị nào của các biến thì giá trị phân thức bằng 0.

GỢI Ý :

$3xy - 18y - 2x + 12 = 0 \Rightarrow (3y - 2)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x = 6$ hoặc $y = \frac{2}{3}$

$9y^2 - 12y + 4 = 0 \Rightarrow (3y - 2)^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ bị loại

Không có giá trị nào của biến để phân thức bằng 0.

Bài 202

Tìm các giá trị của biến x để phân thức nhận giá trị 0 :

a) $\dfrac{x^2 - 25}{x + \dfrac{1}{x - 5}}$;   b) $\dfrac{x^2 - 25}{x + \dfrac{15x + 25}{x - 5}}$

Đáp số : a) $x = -5$ b) Không có giá trị nào của x để phân thức bằng 0

Bài 203

Biểu diễn các phân thức sau đây dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức mà bậc của tử thức thấp hơn bậc của mẫu thức :

a) $\dfrac{x^5 - 2x^4 - x - 3}{x + 1}$;   b) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

GỢI Ý :

a) Chia tử thức cho mẫu thức :

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 - \frac{5}{x + 1}$$

b) $\dfrac{(x^2 + 1) - 2}{x^2 + 1} = 1 - \dfrac{2}{x^2 + 1}$

Bài 204

Thực hiện phép tính :

$$\left[\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{a+b}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{ab}$$

Đáp số : $\frac{1}{ab}$

Bài 205

Chứng minh rằng nếu :

$c^2 + 2(ab - ac - bc) = 0, b \neq c, a + b \neq 0$ **thì** $\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a-c}{b-c}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 8 năm 1982)

GỢI Ý :

Vì $c^2 + 2(ab - ac - bc) = 0$ nên :

$$\frac{a^2 + (a-c)^2}{b^2 + (b-c)^2} = \frac{a^2 + (a-c)^2 + (c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)}{b^2 + (b-c)^2 + (c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)}$$

Rút gọn ta được điều phải chứng minh

Bài 206

Nhà toán học Diophant (thế kỉ thứ 3) đã đề ra bài toán : "Tìm các số hữu tỉ x, y sao cho $x^3 - y^3 = x - y$".

Chứng minh rằng nếu a,b là hai số nguyên tố cùng nhau thì

$$x = \frac{b^2 - 3a^2 - 2ab}{3a^2 + b^2}, \quad y = \frac{4ab}{3a^2 + b^2}$$

thỏa đẳng thức trên đây của Diophant.

GỢI Ý :

Chứng minh $x - y \neq 0$ và $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Bài 207

Cho ba phân thức thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a+b-c}{ab} = \frac{b+c-a}{bc} + \frac{a+c-b}{ac}$$

Chứng minh rằng có ít nhất một phân thức bằng 0

GỢI Ý :

Hệ thức đã cho tương đương với

$$(a-b+c)(a-b-c) = 0$$

Bài 208

Cho a, b, c là các số nguyên từng đôi một khác nhau. Chứng minh rằng biểu thức

$$P = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

có các giá trị là các số nguyên.

GỢI Ý :

$$P = \frac{a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Phân tích tử thức thành nhân tử và rút gọn ta được $P = a + b + c$

Bài 209

Cho ba số x, y, z sao cho xyz = 1. Tính biểu thức

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$$

(Thi học sinh giỏi, Secbi, Nam Tư 1978)

GỢI Ý :

Từ $xyz = 1$ suy ra $x \neq 0$, $z \neq 0$. Tổng đã cho có thể viết thành

$$\frac{z}{z+xz+xyz} + \frac{xz}{xz+xyz+xyz \cdot z} + \frac{1}{1+z+xz} = 1.$$

• HOÁN VỊ VÒNG

Bài 210

Thực hiện phép tính :

$$\frac{1}{(b-c)(a^2+ac-b^2-bc)}+\frac{1}{(c-a)(b^2+ab-c^2-ac)}+\frac{1}{(a-b)(c^2+bc-a^2-ab)}$$

(Đề thi học sinh giỏi, lớp 8 toàn quốc 1980)

GIẢI (vắn tắt)

$$A = a^2+ac-b^2-bc = (a^2-b^2)+c(a-b) = (a-b)(a+b+c)$$

Vậy mẫu thức của phân thức thứ nhất là :

$$A = (b-c)(a-b)(a+b+c)$$

Chú ý rằng, nếu trong mẫu thức của phân thức thứ nhất, ta *thay b bởi c, thay c bởi a và thay a bởi b* thì ta được mẫu thức của phân thức thứ hai. Do vậy :

Mẫu thức của phân thức thứ hai bằng :

$$B = (c-a)(b-c)(a+b+c)$$

Mẫu thức của phân thức thứ ba bằng :

$$C = (a-b)(c-a)(a+b+c)$$

Đáp số : 0

• *Ta nói rằng : từ A suy ra được B, từ B suy ra được C bằng cách hoán vị vòng ba chữ a, b, c, kí hiệu :*

$$a \to b \to c \to a.$$

Nhận xét về hoán vị vòng giúp rút ngắn được lời giải nhiều bài toán và tránh bớt nhầm lẫn.

Bài 211

Chứng minh rằng từ đẳng thức :

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 =$$
$$= (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2 \quad (1)$$

ta suy ra : x = y = z.

GIẢI

Đẳng thức (1) có thể viết thành :

$$[(y + z - 2x)^2 - (y - z)^2] + [(z + x - 2y)^2 - (z - x)^2] +$$
$$+ [(x + y - 2z)^2 - (x - y)^2] = 0 \quad (2)$$

Ở vế trái (2) hạng tử thứ nhất :

$$(y + z - 2x)^2 - (y - z)^2 = 4(y - x)(z - x)$$

Ta nhận thấy nếu hoán vị vòng $y \to z \to x \to y$ thì từ hạng tử thứ nhất ta có hạng tử thứ hai, và từ hạng tử thứ hai, ta có hạng tử thứ ba. Do đó :

$$(z + x - 2y)^2 - (z - x)^2 = 4(z - y)(x - y)$$
$$(x + y - 2z)^2 - (x - y)^2 = 4(x - z)(y - z)$$

Bởi vậy :

(2) $\Leftrightarrow 4(y - x)(z - x) + 4(z - y)(x - y) + 4(x - z)(y - z) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = 0$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (x - z)^2 + (y - z)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x - y = x - z = y - z = 0$

$\Leftrightarrow x = y = z.$

Bài 212

Tính tổng

T = (S – 2b)(S – 2c) + (S – 2c)(S – 2a) + (S – 2a)(S – 2b) trong đó S = a + b + c.

GIẢI (vắn tắt)

$$(S - 2b)(S - 2c) = (a - b + c)(a + b - c) = a^2 - (b - c)^2$$
$$= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \quad (1)$$

Hoán vị vòng b → c → a → b, ta được :

$$(S - 2c)(S - 2a) = b^2 - c^2 - a^2 + 2ca \quad (2)$$
$$(S - 2a)(S - 2b) = c^2 - a^2 - b^2 + 2ab \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra kết quả :

$$T = -a^2 - b^2 - c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Bài 213

Chứng minh rằng nếu : a + b + c = 0 thì :

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

GIẢI

Đặt : $\frac{a-b}{c} = x$; $\frac{b-c}{a} = y$; $\frac{c-a}{b} = z$. Vế trái của đẳng thức cần chứng minh sẽ trở thành :

$$(x + y + z).\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 3 + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} \quad (*)$$

Ta có :

$$\frac{y+z}{x} = \left(\frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)\frac{c}{a-b} = \frac{c}{a-b}.\frac{b^2 - bc + ac - a^2}{ab}$$

$$= \frac{c}{a-b}.\frac{(a-b)(-a-b+c)}{ab} = \frac{c}{ab}(-a - b + c)$$

$$= \frac{c}{ab}(-a - b - c + 2c) = \frac{c}{ab}[2c - (a + b+c)]$$

$$= \frac{2c^2}{ab} \quad \text{vì : } a + b + c = 0.$$

Áp dụng hoán vị vòng $y \to z \to x \to y$ và $c \to a \to b \to c$, ta được :

$$\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} = \frac{2c^2}{ab} + \frac{2a^2}{bc} + \frac{2b^2}{ca} = \frac{2}{abc}(a^3 + b^3 + c^3)$$

Theo bài 56, ta biết :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

với $a + b + c = 0$, ta suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

Vậy : $\dfrac{y+z}{x} + \dfrac{x+z}{y} + \dfrac{x+y}{z} = \dfrac{2}{abc} . 3abc = 6.$

Kết hợp với (*), ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 214

Giả sử :

$$x = \frac{a-b}{a+b}; \quad y = \frac{b-c}{b+c}; \quad z = \frac{c-a}{c+a}$$

Chứng minh rằng :

$$(1 + x)(1 + y)(1 + z) = (1 - x)(1 - y)(1 - z) \qquad (1)$$

GIẢI (vắn tắt)

$$(1) \quad \Leftrightarrow \frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)} = 1 \qquad (2)$$

Thay $x = \dfrac{a-b}{a+b}$ vào $\dfrac{1+x}{1-x}$ ta được : $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{a}{b}$

Hoán vị vòng $x \to y \to y \to x$ và $a \to b \to c \to a$, được :

$$\frac{1+y}{1-y} = \frac{b}{c}; \quad \frac{1+z}{1-z} = \frac{c}{a}$$

Thay vào (2), ta được điều phải chứng minh.

Bài 215

Chứng minh rằng :

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)}+$$
$$+\frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)}+\frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)}$$
$$=\frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

GIẢI (vắn tắt)

$$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}=\frac{(a+b+c+d-x)+(x-a)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}$$
$$=\frac{(a+b+c+d-x)}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+\frac{1}{(b-a)(c-a)(d-a)}$$

Áp dụng hoán vị vòng b → c → d → a → b vào vế trái rồi đơn giản, ta được :

$$(a+b+c+d-x)\left[\frac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)(a-x)}+\right.$$
$$+\frac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)(b-x)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)(c-x)}+$$
$$\left.+\frac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)(d-x)}\right]$$

Quy đồng mẫu thức và tính toán biểu thức trong dấu [ ] ta được :

$$\frac{-1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài 216

Chứng minh rằng nếu

$$x = by + cz \qquad (1)$$
$$y = ax + cz \qquad (2)$$
$$z = ax + by \qquad (3)$$

thì $\dfrac{1}{1+a} + \dfrac{1}{1+b} + \dfrac{1}{1+c} = 2$

(Thi học sinh giỏi lớp 8 toàn quốc 1978)

GỢI Ý :

Từ (2) và (3) ta có : $2ax + x = y + z \Rightarrow 2ax = y + z - x$

$\Rightarrow a = \dfrac{y+z-x}{2x} \Rightarrow 1 + a = \dfrac{x+y+z}{2x} \Rightarrow \dfrac{1}{1+a} = \dfrac{2x}{x+y+z}$

Hoán vị vòng ta được $\dfrac{1}{1+b} = \dfrac{2y}{x+y+z}$, $\dfrac{1}{1+c} = \dfrac{2z}{x+y+z}$

Từ các kết quả trên suy ra đpcm

Bài 217

Cho $x + y + z = 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Hãy rút gọn biểu thức

$$A = \frac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2} + \frac{y^2}{y^2 - x^2 - z^2} + \frac{z^2}{z^2 - x^2 - y^2}$$

GỢI Ý :

Thay $x = -(y + z)$ ở mẫu thức của $\dfrac{x^2}{x^2 - y^2 - z^2}$ ta được $\dfrac{x^2}{2yz}$. Hoán vị vòng để được các phân thức còn lại ta có :

$$A = \frac{x^2}{2yz} + \frac{y^2}{2zx} + \frac{z^2}{2xy} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{2xyz}.$$

Từ bài 56 cho thấy $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$

Đáp số : $A = \dfrac{3}{2}$

CHƯƠNG III

PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

§1. PHƯƠNG TRÌNH

1. Hai biểu thức có chứa biến, nối với nhau bởi dấu "=", lập thành một phương trình. Giá trị của biến làm cho phương trình trở thành một đẳng thức đúng được gọi là nghiệm số (nghiệm) của phương trình.

Biến trong phương trình được gọi là ẩn.

Mỗi biểu thức được gọi là vế của phương trình.

Giải phương trình là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Một phương trình có thể có 1, 2, 3... nghiệm, có thể có vô số nghiệm và có thể không có nghiệm nào (vô nghiệm).

2. Tập xác định (TXĐ) của phương trình là tập hợp các giá trị của biến để các biểu thức của phương trình có nghĩa.

3. Hai phương trình gọi là tương đương nếu chúng có cùng một tập hợp nghiệm. Hai phương trình vô nghiệm cũng được coi là tương đương.

Định lí 1. Nếu cộng cùng một đa thức của ẩn vào hai vế của một phương trình thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Hệ quả 1. Nếu chuyển một hạng tử từ vế này sang vế kia của một phương trình, đồng thời đổi dấu của hạng tử ấy thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Hệ quả 2. Nếu xóa hai hạng tử bằng nhau ở hai vế của một phương trình thì được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

Định lí 2. Nếu nhân một số khác 0 vào hai vế của một phương trình thì ta được một phương trình mới tương đương với phương trình đã cho.

CHÚ Ý. Nếu ta cộng cùng một biểu thức có chứa ẩn ở mẫu hoặc nhân một đa thức của ẩn vào hai vế của một phương trình thì phương trình mới có thể không tương đương với phương trình đã cho.

Bài 218

Tìm tất cả các nghiệm của phương trình :

$$(x + 7)(2x + 1) = 0$$

trong các trường hợp sau :

a) Ẩn x chỉ lấy giá trị trên tập hợp N các số tự nhiên

b) Ẩn x chỉ lấy giá trị trên tập Z các số nguyên

c) Ẩn x chỉ lấy giá trị trên tập Q các số hữu tỉ.

GIẢI

$(x + 7)(2x + 1)$ là một tích của hai nhân tử, tích này bằng 0 *khi và chỉ khi* ít nhất một nhân tử bằng 0.

a) Với mọi $x \in N$ thì $x + 7 > 0$ và $2x + 1 > 0$. Tích của hai số dương không thể bằng 0, vậy phương trình đã cho *vô nghiệm trên tập hợp N.*

b) Với $x \in \mathbf{Z}$ thì : $x + 7 = 0$ có nghiệm $x = -7$

$2x + 1 = 0$ vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có *một nghiệm là −7 trên tập hợp Z.*

c) Với $x \in Q$ thì $x + 7 = 0$ có nghiệm là $x = -7$

$2x + 1 = 0$ có nghiệm là $x = -\frac{1}{2}$.

Vậy phương trình đã cho *có hai nghiệm là* -7 *và* $-\frac{1}{2}$ *trên tập hợp Q.*

• *Ta thấy rằng : Việc giải phương trình (tìm tất cả các nghiệm của nó) phụ thuộc vào việc quy định ẩn lấy* giá trị trên tập hợp nào. *Trong phạm vi lớp 8, khi không có ghi chú gì, thì ta hiểu rằng ta* đang giải phương trình trên tập hợp Q các số hữu tỉ. *Trong trường hợp khác, ta sẽ nói rõ, ví dụ :* tìm nghiệm nguyên của phương trình *(giải phương trình trên tập hợp Z).*

Bài 219

Xét tính tương đương của các phương trình :

$$x + 2 = 0 ; \quad (1)$$

$$(x + 2)(2x + 1) = 0 \quad (2)$$

khi :

a) Ẩn số x chỉ nhận những giá trị trên tập N;

b) Ẩn số x chỉ nhận những giá trị trên tập Z;

c) Ẩn số x chỉ nhận những giá trị trên tập Q.

GIẢI

a) Hai phương trình tương đương vì đều vô nghiệm.

b) Hai phương trình tương đương vì cùng có nghiệm duy nhất là $x = -2$.

c) Hai phương trình không tương đương vì phương trình (1) có nghiệm $x = -2$, phương trình (2) có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = -\frac{1}{2}$

• *Tính tương đương của các phương trình phụ thuộc vào tập hợp các giá trị của ẩn số mà trên đó ta xét. Hai phương trình có thể tương đương trên Q mà không tương đương trên Z.*

Ở lớp 8 nếu không có gì ghi chú thêm thì ta hiểu rằng các ẩn số nhận các giá trị trên tập Q các số hữu tỉ.

Bài 220

Xét xem các cặp phương trình sau đây có tương đương không ?

a) $3x + 1 = 2x + 4$ **và** $3x + 1 + \frac{1}{x-1} = 2x + 4 + \frac{1}{x-1}$;

b) $3x + 1 = 2x + 4$ **và** $3x + 1 + \frac{1}{x-3} = 2x + 4 + \frac{1}{x-3}$.

GỢI Ý :

a) Tương đương

b) Không tương đương.

Bài 221

Các cặp phương trình sau đây có tương đương không ?

a) $x + 3 = 0$ **và** $(x + 3)(x^2 + 2) = 0$;

b) $x + 3 = 0$ **và** $(x + 3)(x - 1) = 0$.

GIẢI

a) Tương đương

b) Không tương đương

Ghi chú : Nếu mỗi nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là một nghiệm của phương trình $h(x) = k(x)$ (đảo lại có thể không đúng) thì ta bảo $h(x) = k(x)$ là *phương trình hệ quả* của phương trình $f(x) = g(x)$. Trong bài này phương trình $(x + 3)(x - 1) = 0$ là hệ quả của phương trình $x + 3 = 0$

Bài 222

Các cặp phương trình sau đây có tương đương không ?

a) $x + 3 = 2$ **và** $\frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}$;

b) $x + 3 = 2$ và $\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{2}{x^2-4}$;

c) $(x + 3) = 2$ và $(x+3)\frac{x-1}{x+1} = \frac{2(x-1)}{x+1}$.

GỢI Ý :

a) Không tương đương

b) Tương đương

c) Không tương đương

§2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Phương trình bậc nhất một ẩn là phương trình có thể biến đổi tương đương về dạng :

$$ax + b = 0$$

trong đó a, b là hằng số và $a \neq 0$.

Phương trình có nghiệm duy nhất là : $x = -\frac{b}{a}$

Bài 223

Giải các phương trình

a) $x - \frac{2x-5}{5} + \frac{x+2}{6} = 6 + \frac{x-1}{3}$ (1)

b) $\left(\frac{3}{2}x + 1\right)(12 - x) - \frac{5}{2}(x^2 + 2) = -2(1 + 2x^2)$ (2)

GIẢI

a) Nhân hai vế của (1) với 30 (30 là mẫu chung của $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$ và $\frac{1}{3}$) ta được :

$30x - 6(2x - 5) + 5(x + 2) = 6.30 + 10(x - 1)$

$\Leftrightarrow 30x - 12x + 5x - 10x = 180 - 30 - 10 - 10$

$\Leftrightarrow 13x = 130 \Leftrightarrow x = \dfrac{130}{13} = 10$

b) Nhân hai vế của (2) với 2 ta được :

(2) $\Leftrightarrow (3x + 2)(12 - x) - 5(x^2 + 2) = -4(1 + 2x^2)$

$\Leftrightarrow -3x^2 + 34x + 24 - 5x^2 - 10 = -4 - 8x^2$

$\Leftrightarrow 34x = -18 \Leftrightarrow x = \dfrac{-9}{17}$

Nhận xét : Giải một phương trình là quá trình tìm nghiệm bằng cách thực hiện liên tiếp các phép biến đổi tương đương phương trình đã cho để thu được các phương trình ngày càng đơn giản hơn, dễ dàng tìm nghiệm hơn.

Bài 224

Giải các phương trình :

a) $12 - 3(x - 2)^2 = (x + 2)(1 - 3x) + 2$

b) $\dfrac{(x - 2)(x + 10)}{3} - \dfrac{(x + 4)(x + 10)}{12} = \dfrac{(x - 2)(x + 4)}{4}$

c) $\dfrac{4x - 3}{5} - 2x + 1 = \dfrac{3 - 5x}{3} + \dfrac{x}{2}$

d) $(x + 1)(x - 3) - \dfrac{1}{2}(3 - x)(5 - 2x) = 6 - x$

e) $x(x + 3)^2 - 3x = (x + 2)^3 + 1$

g) $\dfrac{(2x + 1)^2}{4} + \dfrac{(1 - 3x)x}{3} = \dfrac{5x}{4} + 1$.

Đáp số : a) $\dfrac{4}{17}$ b) 8 c) -18

d) $\dfrac{11}{3}$ e) $-\dfrac{3}{2}$ g) 9

Bài 225

Giải các phương trình:

a) $\dfrac{2x - \dfrac{4 - 3x}{5}}{15} = \dfrac{7x - \dfrac{x - 3}{2}}{5} - x + 1$; (1)

b) $x - \dfrac{\dfrac{x}{2} - \dfrac{3 + x}{4}}{2} = \dfrac{2x - \dfrac{10 - 7x}{3}}{2} - (x + 1)$; (2)

c) $\dfrac{3}{10}(1,2 - x) - \dfrac{5 + 7x}{4} = \dfrac{1}{20}(9x + 0,2) - \dfrac{12,5x + 4,5}{5}$ (3)

GỢI Ý :

a) (1) $\Leftrightarrow 2(13x - 4) = 15(3x + 13) \Leftrightarrow x = -\dfrac{203}{19}$

b) (2) $\Leftrightarrow 3(7x + 3) = 4(7x - 4) \Leftrightarrow x = \dfrac{25}{7}$

c) *Đáp số :* Mọi số thực đều là nghiệm của (3)

Bài 226

Giải phương trình :

$$\frac{x + 1}{65} + \frac{x + 3}{63} = \frac{x + 5}{61} + \frac{x + 7}{59}$$

GIẢI (vắn tắt)

Nhận xét rằng, trong các phân thức trên nếu cộng tử thức với mẫu thức thì các tử thức trở thành x + 66, cho nên ta cộng 1 vào cả bốn phân thức :

$$\left(\frac{x + 1}{65} + 1\right) + \left(\frac{x + 3}{63} + 1\right) = \left(\frac{x + 5}{61} + 1\right) + \left(\frac{x + 7}{59} + 1\right)$$

$$\frac{x + 66}{65} + \frac{x + 66}{63} = \frac{x + 66}{61} + \frac{x + 66}{59}$$

$$(x + 66)\left(\frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59}\right) = 0$$

do $$\left(\frac{1}{65} + \frac{1}{63} - \frac{1}{61} - \frac{1}{59}\right) \neq 0$$

Nên : $x + 66 = 0$, $x = -66$.

Bài 227

Chứng minh rằng nghiệm của phương trình sau đây là một số nguyên :

$$\frac{x-29}{1970} + \frac{x-27}{1972} + \frac{x-25}{1974} + \frac{x-23}{1976} + \frac{x-21}{1978} + \frac{x-19}{1980} =$$

$$= \frac{x-1970}{29} + \frac{x-1972}{27} + \frac{x-1974}{25} + \frac{x-1976}{23} + \frac{x-1978}{21} + \frac{x-1980}{19}$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi lớp 8 toàn quốc 1978)

GỢI Ý :

Vận dụng nhận xét và cách giải bài toán trên, ta đi đến kết quả :

$$(x - 1999)\left(\frac{1}{29} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{19} - \frac{1}{1970} - \frac{1}{1972} - ... - \frac{1}{1980}\right) = 0$$

$\Rightarrow x = 1999$

Bài 228

Giải các phương trình

a) $\frac{x+29}{31} - \frac{x+27}{33} = \frac{x+17}{43} - \frac{x+15}{45}$

b) $\frac{x+6}{1999} + \frac{x+8}{1997} = \frac{x+10}{1995} + \frac{x+12}{1993}$

c) $\frac{1909-x}{91} + \frac{1907-x}{93} + \frac{1905-x}{95} + \frac{1903-x}{91} + 4 = 0$

Đáp số : a) $x = -60$ b) $x = -2005$ c) $x = 2000$

§3. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA ẨN Ở MẪU THỨC

Để giải phương trình chứa ẩn ở mẫu thức, ta cần

1. Tìm tập xác định của phương trình (tập các giá trị của biến làm cho biểu thức của phương trình có nghĩa)

2. Quy đồng mẫu thức rồi khử mẫu thức

3. Giải phương trình nhận được sau khi khử mẫu thức

4. Loại những giá trị là nghiệm của phương trình ở bước 3 mà không thuộc tập xác định.

Tất cả các nghiệm nhận được ở bước 3 thuộc tập xác định đều là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài 229

Giải phương trình

$$\frac{x}{2(x-3)} + \frac{x}{2(x+1)} = \frac{2x}{(x+1)(x-3)} \quad (1)$$

GIẢI

Biểu thức của phương trình có nghĩa nếu $x - 3 \neq 0$, $x + 1 \neq 0$ tức là với $x \neq 3$, $x \neq -1$. Vậy tập xác định là :

TXĐ = $\{x \mid x \neq 3, x \neq -1\}$

Quy đồng mẫu thức ta được :

$$\frac{x(x+1) + x(x-3)}{2(x+1)(x-3)} = \frac{4x}{2(x+1)(x-3)}$$

Khử mẫu thức ta được :

$$(1) \Rightarrow x(x+1) + x(x-3) = 4x$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-3) = 0 \quad (2)$$

Phương trình (2) có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 3$.

Nghiệm $x = 3$ không thuộc tập xác định, cần phải loại. Vậy nghiệm của phương trình (1) là $x = 0$.

Bài 230

Giải các phương trình :

a) $\frac{x-4}{x(x+2)} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x(x-2)}$

b) $\frac{y+5}{y^2-5y} - \frac{y-5}{2y^2-10y} = \frac{y+25}{2y^2-50}$ c) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x(x-2)} = \frac{x+2}{x-2}$

GIẢI

a) Biểu thức của phương trình có nghĩa nếu $x(x+2) \neq 0$, $x^2 - 4 \neq 0$, $x(x-2) \neq 0$ tương đương với $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$.

Vậy tập xác định của phương trình là : TXĐ = $\mathbf{Q} \setminus \{0; \pm 2\}$.

Quy đồng mẫu thức ta được :

$$\frac{(x-4)(x-2)+2x}{x(x^2-4)} = \frac{x+2}{x(x^2-4)}$$

Khử mẫu thức các phân thức đã quy đồng ta được :

$(x - 4)(x - 2) + 2x = x + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 2, x = 3$

Loại $x = 2$ vì không thuộc tập xác định của phương trình.

ĐS : $x = 3$

b) Phương trình có nghĩa nếu $y^2 - 5y \neq 0$; $2(y^2 - 25) \neq 0$

Suy ra tập xác định của phương trình :

TXĐ = $Q \setminus \{0; \pm 5\}$

Quy đồng mẫu thức ta được :

$$\frac{2(y+5)^2}{2y(y^2-25)} - \frac{(y-5)(y+5)}{2y(y^2-25)} = \frac{(y+25)y}{2y(y^2-25)}$$

Khử mẫu thức và rút gọn ta được : $y = 15$

c) Giải tương tự như trên. *ĐS :* $x = -1$

Bài 231

Với giá trị nào của các biến thì các biểu thức sau đây vô nghĩa :

a) $$\frac{3x^2 - 1}{\dfrac{5}{x-2} - \dfrac{4}{x-3} - \dfrac{1}{x}}; \quad (1)$$

b) $$\frac{5u^2 - u + 1}{\dfrac{u^2+5}{u^2-5u} + \dfrac{u-5}{2u^2-10} - \dfrac{u+25}{2u^2-50}} \quad (2)$$

GIẢI (vắn tắt)

a) Trước hết ta thấy biểu thức ở mẫu thức vô nghĩa, nếu :

$x - 2 = 0$; $x - 3 = 0$ hoặc $x = 0$, tức là nếu $x = 2; 3; 0$

Rút gọn đưa biểu thức (1) về dạng :

$$\frac{x(x-2)(x-3)(3x^2-1)}{-2x-6}$$

Nếu : $-2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ thì (1) vô nghĩa.

Vậy : Các giá trị của biến làm cho biểu thức vô nghĩa là :

$$-3; 0; 2; 3.$$

b) *Đáp số :* $-5; 0; 5; 15$.

Bài 232

Giải phương trình :

$$\frac{x+4}{2x^2-5x+2}+\frac{x+1}{2x^2-7x+3}=\frac{2x+5}{2x^2-7x+3} \qquad (1)$$

GỢI Ý :

Việc đặt điều kiện để mẫu thức $\neq 0$, tức là tìm x sao cho

$$2x^2-5x+2 \neq 0 \text{ và } 2x^2-7x+3 \neq 0$$

là điều có phần phức tạp. Trong trường hợp này, đơn giản hơn là : đưa phương trình về dạng nguyên (khử mẫu thức), và chỉ lấy nghiệm nào không làm cho mẫu thức bằng 0.

GIẢI

Thực hiện các phép biến đổi tương đương, ta đưa (1) về dạng :

$$\frac{x+4}{2x^2-5x+2}-\frac{x+4}{2x^2-7x+3}=0$$

$$(x+4)\left(\frac{1}{2x^2-5x+2}-\frac{1}{2x^2-7x+3}\right)=0$$

$$\frac{(x+4)(1-2x)}{(2x^2-5x+2)(2x^2-7x+3)}=0$$

$$(x+4)(1-2x)=0 \Leftrightarrow x=-4 \text{ hoặc } x=\frac{1}{2}.$$

Thử vào mẫu thức :

với $x=\frac{1}{2}$ thì $2x^2-5x+2=0$

với $x=-4$ thì $(2x^2-5x+2)(2x^2-7x+3) \neq 0$

Kết luận : Phương trình (1) đã cho có nghiệm duy nhất là :

$$x=-4$$

Bài 234

Giải phương trình : $\mathbf{x^2 - 4x + 3 = 0}$

GỢI Ý :

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \end{array}\right.$$

Bài 235

Giải phương trình : $\mathbf{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0}$

GỢI Ý :

Phân tích vế trái thành nhân tử, ta được :

$$x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x^2 + x + 6) = 0$$

Đáp số : $x_1 = -2$, $x_2 = 1$

Chú ý :

$x^2 + x + 6 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 5\frac{3}{4} \neq 0$ với mọi x.

Bài 236

Giải phương trình : $\mathbf{x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0}$

Đáp số : $x_1 = 2$, $x_2 = -3$

Bài 237

Giải phương trình : $\mathbf{x^3 - 2x^2 - x + 12 = 0}$

Đáp số : $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2$

Bài 238

Giải các phương trình

a) $x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$ **b)** $x^4 - 2x^3 + x - 2 = 0$

c) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0$ **d)** $x^3 - 7x - 6 = 0$

Đáp số : a) $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ b) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$

c) $x_1 = 2,\ x_2 = -3$ d) $x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2$

• PHƯƠNG TRÌNH CÓ HỆ SỐ BẰNG CHỮ (THAM SỐ)

Cho phương trình : $ax + b = 0$

1. *Nếu* $a \neq 0$, *ta có phương trình bậc nhất, phương trình này có nghiệm duy nhất* $x = -\dfrac{b}{a}$

2. *Nếu* $a = 0$, *phương trình có dạng :*

$$0x + b = 0 \text{ hay } 0x = -b$$

a) Nếu $b \neq 0$, *ta có :*

$0x \neq 0$: *phương trình vô nghiệm*

b) Nếu $b = 0$, *ta có :*

$0x = 0$: *phương trình có nghiệm là bất kì giá trị nào của x (vô số nghiệm)*

Đối với phương trình có hệ số bằng chữ (phương trình có tham số), ta phải xét mọi trường hợp về giá trị của tham số để phương trình có nghiệm (xác định giá trị của nghiệm), vô nghiệm hay có vô số nghiệm. Làm như vậy là ta đã giải và biện luận phương trình.

Bài 239

Giải và biện luận phương trình $\frac{2x - m}{3} = \frac{x + 1}{m} + 1$ **(1)**

với tham số m.

GIẢI

Điều kiện xác định : $m \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow (2m - 3)x = m^2 + 3m + 3$$

Nếu $m \neq 0$, $m \neq \frac{3}{2}$ phương trình có nghiệm $x = \frac{m^2 + 3m + 3}{2m - 3}$

Nếu $m = \frac{3}{2}$ phương trình (1) trở thành : $0.x = \frac{39}{4}$

Khi đó phương trình vô nghiệm.

Bài 240

Giải và biện luận phương trình với tham số

a) $4x - 2 = m(mx - 1)$ **(1)**

b) $m^2x + 5 = m(x + 5)$ **(2)**

GIẢI

a) (1) $\Leftrightarrow m^2x - 4x = m - 2$

$\Leftrightarrow (m^2 - 4)x = m - 2$

– Nếu $m^2 - 4 \neq 0$ tức là $m \neq 2$ và $m \neq -2$ thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{m - 2}{m^2 - 4} = \frac{1}{m + 2}$

– Nếu $m = 2$ phương trình (1) trở thành $0x = 0$, phương trình nhận mọi số hữu tỉ làm nghiệm (vô định)

– Nếu $m = -2$ phương trình (1) có dạng $0x = -4$, vô nghiệm.

b) (2) $\Leftrightarrow (m^2 - m)x = 5m - 5$

– Nếu $m^2 - m \neq 0$, tức là với $m \neq 0$ và $m \neq 1$ phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{5(m-1)}{m(m-1)} = \dfrac{5}{m}$.

– Nếu m = 0, phương trình (2) có dạng 0x = −5, nên vô nghiệm.

– Nếu m = 1 phương trình (2) trở thành 0x = 0, phương trình có vô số nghiệm (vô định).

Bài 241

Giải và biện luận phương trình

$$(k^2 - 9)x = k^2 + 3k \text{ (k là tham số)}$$

GIẢI

1) Nếu $k^2 - 9 \neq 0$, tức $k \neq \pm 3$, phương trình có nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{k^2 + 3k}{k^2 - 9} = \dfrac{k}{k-3}$

2) Với k = 3, phương trình có dạng 0x = 18

Phương trình này vô nghiệm

3) Với k = −3, phương trình đã cho có dạng 0x = 0. Mọi số hữu tỉ đều là nghiệm của phương trình (vô định).

Bài 242

Giải và biện luận phương trình với các tham số a, b, c sau đây

$$\frac{x-b-c}{a} + \frac{x-c-a}{b} + \frac{x-a-b}{c} = 3.$$

GIẢI (vắn tắt)

Đưa phương trình về dạng

$$\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)+\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow [x-(a+b+c)]\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]=0$$

– Nếu $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\neq 0$ phương trình có nghiệm duy nhất $x=a+b+c$

– Nếu $A=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ phương trình có dạng $0x=0$.

Mọi số hữu tỉ đều là nghiệm của phương trình

Bài 243

Giải và biện luận phương trình, với các tham số a, b, c

a) $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-bc}{b+c}=a+b+c$

$(a\neq -b,\ b\neq -c,\ c\neq -a)$

b) $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$

$(a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0,\ a+b+c\neq 0)$

GIẢI (vắn tắt)

a) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{x-ab}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$$

Quy đồng mẫu thức mỗi biểu thức trong từng dấu (.), ta đi đến :

$$(x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\right)=0$$

– Nếu $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} \neq 0$, phương trình có nghiệm duy nhất $x = ab + ac + bc$

– Nếu $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = 0$, phương trình có nghiệm là một số hữu tỉ bất kì.

b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\left(\frac{a+b-x}{c} + 1\right) + \left(\frac{a+c-x}{b} + 1\right) + \left(\frac{b+c-x}{a} + 1\right)$$

$$= 4 - \frac{4x}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow (a + b + c - x)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c}\right) = 0$$

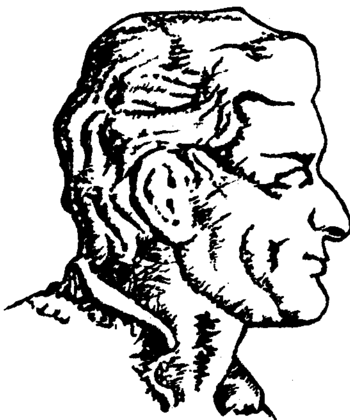
a) Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} \neq 0$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = a + b + c$

3) Nếu $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{4}{a+b+c} = 0$, phương trình có vô số nghiệm

• I. NEWTON

Isaac Newton (Isăc–Niutơn, 1642–1727) là nhà toán học, vật lí học, thiên văn học vĩ đại người Anh. Ông nổi tiếng trong lí thuyết phép tính vi tích phân, là cơ sở của toán học cao cấp; các định luật quán tính, định luật vạn vật hấp dẫn, định luật về lực và gia tốc, là nền tảng của cơ học và khoa học nghiên cứu quy luật chuyển động của các thiên thể, nhờ đó người ta phát hiện ra những hành tinh chưa từng thấy, tính toán chính xác về nhật thực, nguyệt thực ... Có nhiều chuyện kể thú vị về Newton.



Bên cạnh câu chuyện "Quả táo Newton" nổi tiếng, người ta còn nói đến sự "trả thù" độc đáo của Newton. Bố ông mất từ khi ông chưa ra đời. Khi bé Newton lên ba thì mẹ đi bước nữa. Cậu ở với bà nội, rồi đi học trường làng ở miền quê nước Anh. Năm 12 tuổi Newton được bà Nội gửi lên học lớp tư thục nội trú ở một thành phố nhỏ. Vì hoàn cảnh riêng tư, Newton gầy nhỏ, thích sống trầm buồn không thể hiện tài năng gì đặc biệt và hay bị bắt nạt. Một lần ra chơi cậu bị một học sinh lớn, giỏi nhất lớp đánh đau điếng người; nhưng vì sức yếu, lại học kém, Newton không đánh trả. Cậu nghĩ, phải học giỏi, đứng đầu lớp, mới làm cho kẻ kia kính nể được.

Thế là với lòng quyết tâm vô hạn, chỉ ba bốn tháng sau Isăc đã đứng đầu lớp và được bạn bè ngày càng mến phục. Từ đó, càng học, Newton càng say mê khám phá, ngày càng trở nên xuất sắc, rồi sau này trở thành nhà Bác học vĩ đại.

Newton mất ngày 21-3-1727 thọ 76 tuổi. Trên bức tượng tôn vinh ông, người ta đã khắc câu : "Người vượt lên nhân loại bằng sức mạnh trí tuệ của mình".

§5. GIẢI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Nhà bác học Anh Newton đã viết trong cuốn sách giáo khoa đại số của ông rằng : "*Muốn giải quyết một vấn đề liên quan đến các số hoặc các quan hệ trừu tượng giữa các đại lượng, chỉ cần phiên dịch bài toán từ ngôn ngữ mẹ đẻ sang ngôn ngữ đại số*" .Đó chính là vấn đề giải toán bằng cách lập phương trình. Việc giải toán được thực hiện qua các bước sau :

1. Chọn ẩn và đặt điều kiện mà ẩn phải thỏa mãn.

2. Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác qua các đại lượng đã biết và đại lượng được chọn làm ẩn.

3. Lập phương trình diễn đạt mối quan hệ giữa các đại lượng trong bài toán.

4. Giải phương trình

5. Nhận định kết quả và trả lời (đối chiếu nghiệm tìm được với điều kiện đã đặt ra – thử lại vào đề toán).

Bài 244

Năm ngoái tổng số dân của hai tỉnh A và B là 4 triệu. Dân số tỉnh A năm nay tăng lên 1,2% còn tỉnh B tăng lên 1,1%. Do đó dân số hai tỉnh năm nay là 4045000 người. Tính dân số mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay.

Hướng dẫn cách vận dụng các bước để giải bài toán

Bước 1 : Chọn ẩn: ở đây người ta hỏi dân số của mỗi tỉnh năm ngoái và năm nay. Do vậy, ta có thể chọn dân số tỉnh A (hoặc tỉnh B) năm ngoái (hoặc năm nay) làm ẩn số. Chẳng hạn, ta gọi x là dân số năm ngoái của tỉnh A.

Vì số dân là số người nên x nguyên; > 0.

Bước 2 : Biểu diễn các đại lượng chưa biết khác qua x và các đại lượng đã biết.

Ta có bảng sau :

	Số dân năm ngoái	**Số dân năm nay**	**Số tăng**
Tỉnh A	x		$\frac{1,2}{100}x$
Tỉnh B	4 000 000 – x		$\frac{1,1}{100}(4\,000\,000 - x)$
Cộng	4 000 000	4 045 000	45 000

Bài 245

Bài toán cổ

Một đàn em nhỏ đứng bên sông
To nhỏ bàn nhau chuyện chia hồng
Mỗi người năm trái thừa năm trái
Mỗi người sáu trái một người không
Hỏi người bạn trẻ đang dừng bước
Có mấy em thơ, mấy trái hồng ?

GIẢI

Tóm tắt các dữ kiện của bài toán

	Số trái / người	**Kết quả**
Cách chia thứ nhất	5	Dư 5 trái
Cách chia thứ hai	6	Một người không được chia

Cách thứ nhất : Chọn ẩn x là số em bé đứng bên sông

Điều kiện : x nguyên, dương

Theo cách chia thứ nhất, số trái hồng là : $5x + 5$

Theo cách chia thứ hai, số trái hồng là : $6(x - 1)$

Vì số trái hồng là không đổi nên ta có phương trình :

$$5x + 5 = 6(x - 1) \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) ta được $x = 11$ nguyên, dương, thỏa mãn điều kiện đặt ra.

Kết luận : Số em bé : 11 em, số trái hồng $6(11 - 1) = 60$ trái.

Thử vào đề toán, thấy đáp số đúng.

Cách thứ hai : Chọn ẩn x là số trái hồng

Điều kiện x nguyên dương

Theo cách chia thứ nhất, số em bé được chia hồng là : $\frac{x-5}{5}$

Theo cách chia thứ hai, số em bé được chia là $\frac{x}{6}$.

Theo đề, số em được chia theo cách thứ nhất nhiều hơn số em được chia theo cách thứ hai là 1 nên có phương trình

$$\frac{x-5}{5} = \frac{x}{6} + 1 \qquad (2)$$

Giải phương trình (2) ta được x = 60

Kết luận : có 60 trái hồng và 11 em bé.

Chú ý

Có những bài toán (bằng ngôn ngữ mẹ đẻ) thoạt nghe thấy khác nhau xa, nhưng khi "phiên dịch" sang ngôn ngữ đại số thì thấy bản chất đại số của chúng chỉ là một. Ta hãy lấy hai bài toán sau đây làm ví dụ :

Bài 246

Hai chiếc ôtô khởi hành từ hai tỉnh A và B, ngược chiều nhau. Chiếc xe đi từ A có vận tốc 40km/h, chiếc xe đi từ B có vận tốc 30km/h. Nếu chiếc xe đi từ B khởi hành sớm hơn chiếc đi từ A là 6 giờ thì hai xe gặp nhau ở địa điểm cách đều cả A và B. Tìm quãng đường AB ?

GIẢI

Gọi x (km) là chiều dài nửa quãng đường AB. Thời gian đi của xe khởi hành từ A là $\frac{x}{40}$h. Thời gian đi quãng đường x (km) của xe khởi hành từ B là $\frac{x}{30}$h. Thời gian của xe đi từ B nhiều hơn thời gian của xe đi từ A là 6h nên ta có phương trình.

$$\frac{x}{40} + 6 = \frac{x}{30} \qquad (1)$$

Giải phương trình (1) ta được x = 720

Quãng đường AB dài là 720.2 = 1440 km

Bài 247

Hai vòi nước chảy vào một cái bể, vòi thứ nhất chảy được 40 lít trong một phút. Vòi thứ hai chảy được 30 lít trong một phút. Nếu người ta cho vòi thứ hai chảy trước vòi thứ nhất 6 phút thì khi chảy đầy bể, lượng nước từ hai vòi chảy vào bể là bằng nhau.

Tìm dung tích của bể nước.

GỢI Ý :

Gọi dung tích bể nước là 2x (lít). Thời gian chảy được x lít của mỗi vòi liên hệ với nhau bởi phương trình : $\frac{x}{40} + 6 = \frac{x}{30}$

(Đây cũng là phương trình nhận được trong bài trên)

Bài 248

Một chiếc mô tô đi từ M đến K với vận tốc 62 km/h và một chiếc ôtô cũng đi từ M đến K với vận tốc 55 km/h. Để cho hai xe đến đích cùng một lúc người ta phải cho xe ô tô đi trước một thời gian nhưng vì lí do đặc biệt nên mới chạy được 2/3 quãng đường MK xe ô tô buộc phải chạy với vận tốc 27,5 km/h vì vậy khi còn cách K 124km thì mô tô đã đuổi kịp ô tô. Tìm khoảng cách từ M đến K.

GIẢI (vắn tắt)

Gọi x (km) là chiều dài quãng đường MK. Theo dự tính thì, thời gian ô tô phải chạy trước mô tô là : $\left(\frac{x}{55} - \frac{x}{62}\right)$ giờ.

Quãng đường mô tô đã chạy để đuổi kịp ô tô là : (x − 124) km

Thời gian mô tô đã chạy trên quãng đường (x − 124) km là :

$$\frac{x - 124}{62}$$

Thời gian để ô tô chạy quãng đường trên đây là :

$$\left(\frac{\frac{2}{3}x}{55} + \frac{\frac{x}{3} - 124}{27,5}\right) \text{ giờ}$$

Ta có phương trình :

$$\frac{\frac{2}{3}x}{55} + \frac{\frac{x}{3} - 124}{27,5} = \left(\frac{x}{55} - \frac{x}{62}\right) + \frac{x - 124}{62}$$

Giải phương trình trên ta được x = 414 km là chiều dài quãng đường MK

Bài 249

Một ca nô xuôi dòng từ bến A đến B mất 4 giờ và ngược dòng từ B đến A mất 5 giờ. Tìm đoạn đường AB, biết vận tốc dòng nước là 2km/h.

GỢI Ý :

Vận tốc ca nô xuôi dòng bằng vận tốc riêng của ca nô cộng vận tốc dòng nước. Vận tốc ca nô ngược dòng bằng vận tốc riêng của ca nô trừ vận tốc dòng nước

Cách 1 : Gọi x là đoạn đường AB, ta có phương trình :

$$\left(\frac{x}{4} - 2\right) = \left(\frac{x}{5} + 2\right) \Rightarrow \frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 4 \Rightarrow x = 80 \text{ (km)}$$

Cách 2: Gọi x là vận tốc riêng của ca nô (x > 0) ta có phương trình :

$$4(x + 2) = 5(x - 2) \Rightarrow x = 18 \text{ (km/h)}$$

Từ đây có : AB = 4(18 + 2) = 80 (km)

Bài 250

Điền vào ô trống cho đủ các số từ 1 đến 16, sao cho tổng các số trên mỗi dòng, mỗi cột và mỗi đường chéo là như nhau.

(Đề thi Olympic toán trường Đại học sư phạm Mascova, LB Nga, 1999. Kì thi dành cho học sinh đã có bằng tú tài; học sinh đoạt giải được tuyển thẳng vào trường).

		14	4
12			9
8	10		
	3	2	

Gợi ý :

Tổng các số trên tất cả các ô vuông là 1 + 2 + ... + 15 + 16 = 136, suy ra tổng 4 số trên mỗi dòng (cột, đường chéo) là S = 34.

x	16−x	14	4
12	5+x	8−x	9
8	10	10+x	6−x
14−x	3	2	15+x

Gọi x là số chưa biết ở một ô trống bất kì, chẳng hạn ở ô trên dòng đầu và cột đầu. Do S = 34, suy ra các số (theo x) ở các ô trống khác. Tổng các số trên một đường chéo xác định phương trình :

$$(14 - x) + 10 + (8 - x) + 4 = 34$$

cho x = 1.

Cũng có thể, không cần lập phương trình, mà dựa vào nhận xét : các số phải tìm là từ 1 đến 16, nên số 15 + x (ô cuối cùng bên phải) phải là 16, và x = 1.

Bạn có thể giải cách khác nhanh hơn không (quan sát các số ở dòng cuối chẳng hạn) ?

Bài 251

Hai anh em hiện nay có tuổi cộng lại bằng 63. Tuổi của người anh hiện nay gấp đôi tuổi của người em khi người anh có tuổi bằng tuổi người em hiện nay. Hỏi tuổi của mỗi người hiện nay ?

Gợi ý :

Nếu hai người cùng sống thì người này tăng bao nhiêu tuổi, người kia cũng tăng bấy nhiêu tuổi. Sự chênh lệch tuổi của hai người là không thay đổi.

GIẢI

Gọi x là tuổi người anh hiện nay thì tuổi người em hiện nay là 63 − x. Chênh lệch tuổi của hai anh em là :

$$x - (63 - x) = 2x - 63$$

Lúc người anh có tuổi bằng 63−x (tuổi người em hiện nay) thì khi đó người em có tuổi là : $63 - x - (2x - 63) = 126 - 3x$

Từ giả thiết ta có phương trình : $x = 2\,(126 - 3x)$ (1)

Giải phương trình (1) ta được x = 36

Đáp số : 36, 27

Bài 252

Hiện giờ tuổi của cha gấp 7 lần tuổi con. Mười năm sau tuổi của cha gấp ba lần tuổi con. Hỏi hiện nay mỗi người bao nhiêu tuổi ?

GỢI Ý :

Gọi tuổi của con hiện nay là x, sau 10 năm nữa tuổi của cha và con lần lượt là 7x + 10 và x + 10. *Đáp số :* 35 tuổi và 5 tuổi.

Bài 253

Một hôm Hùng hỏi Tuấn "Năm nay bố Tuấn bao nhiêu tuổi ?" Tuấn trả lời : "Nếu tuổi bố mình bớt đi 4 thì gấp ba lần tuổi mình (hiện nay). Trước đây 4 năm bố mình gấp 4 lần tuổi mình (lúc bấy giờ)". Hỏi tuổi của mỗi người hiện nay là bao nhiêu ?

Đáp số : 52 tuổi, 16 tuổi

Bài 254

Một số tự nhiên có 5 chữ số. Nếu thêm chữ số 1 vào bên phải hay bên trái số đó ta đều được một số có 6 chữ số. Biết rằng nếu viết thêm vào bên phải số đó thì được một số lớn gấp ba lần số nhận được khi ta viết vào bên trái. Hãy tìm số đó.

(Thi học sinh giỏi Quảng Bình, 1964)

GỢI Ý :

Mót số ghi trong hệ thập phân $x = \overline{abcde}$, a,b,c,d,e là các chữ số trong các chữ số 0, 1, 2,..., 8, 9 với $a \neq 0$

$$x = \overline{abcde} = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

GIẢI

Gọi số phải tìm là x (nguyên dương) $x = \overline{abcde}$

Viết thêm vào bên trái chữ số 1 ta được số có dạng

$$y = \overline{1abcde} = 1 \cdot 10^5 + a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$
$$= 10^5 + x$$

Nếu viết thêm vào bên phải số x chữ số 1 ta được số :

$z = \overline{abcde1} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + d \cdot 10^2 + e \cdot 10 + 1$

$= 10(a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e) + 1 = 10x + 1$.

Theo giả thiết ta có :

$$z = 3y \Leftrightarrow 10x + 1 = 3(10^5 + x)$$

$$\Leftrightarrow 7x = 3 \cdot 10^5 - 1 = 299999 \Leftrightarrow x = 42857$$

Số cần tìm là : 42857

Bài 255

Một số có hai chữ số trong đó chữ số hàng chục gấp 3 lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số ta được một số có hai chữ số nhỏ hơn số ban đầu 18 đơn vị.

Tìm số đó.

Đáp số : 31

Bài 256

Thương của hai số là 3. Tăng số bị chia lên 10 và giảm số chia đi một nửa thì hiệu của hai số mới là 30. Tìm hai số đó.

Đáp số : 24; 8

Bài 257

Nhân ngày 1 tháng 6 một phân đội thiếu niên được tặng một số kẹo, số kẹo này được chia hết và chia đều cho mọi đội viên trong phân đội. Để đảm bảo nguyên tắc chia ấy, phân đội trưởng đã đề xuất cách nhận phần kẹo của mỗi người như sau :

– Bạn thứ nhất nhận một cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Sau khi bạn thứ nhất đã lấy phần của mình, bạn thứ hai nhận 2 kẹo và

được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại. Cứ như thế đến bạn cuối cùng, thứ n, nhận n cái kẹo và được lấy thêm $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại.

Hỏi phân đội thiếu niên trên có bao nhiêu đội viên và mỗi đội viên nhận bao nhiêu cái kẹo ?

(Thi học sinh giỏi cấp II miền Bắc 1972)

GIẢI

Cách thứ nhất : Gọi số kẹo mà phân đội nhận được là x. Theo cách chia thì bạn thứ nhất được $(1 + \frac{x-1}{11})$ chiếc kẹo.

Bạn thứ 2 lấy đi 2 chiếc thì số kẹo còn lại là :

$$x - \left(2 + 1 + \frac{x-1}{11}\right) = \frac{10x - 32}{11}$$

Phần kẹo bạn thứ hai nhận được là :

$$2 + \frac{10x - 32}{11} : 11 = \frac{210 + 10x}{121}$$

Vì các phần kẹo bằng nhau nên ta có :

$$1 + \frac{x-1}{11} = \frac{210 + 10x}{121} \Rightarrow x = 100$$

Số đội viên là : $100 : \left(1 + \frac{100-1}{11}\right) = 10$

Vậy số đội viên là 10 và mỗi đội viên nhận 10 kẹo.

Cách thứ hai.

Vì bạn thứ n (bạn cuối cùng) lấy n cái kẹo và $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại lần thứ n thì vừa hết nên $\frac{1}{11}$ số kẹo còn lại của lần thứ n phải bằng 0. Vì có n bạn mỗi bạn lấy n cái kẹo nên số kẹo là n × n chiếc.

Bạn thứ nhất lấy số kẹo là : $1 + \frac{n^2 - 1}{11}$ chiếc. Số kẹo đó phải bằng n nên ta có phương trình

$$1 + \frac{n^2 - 1}{11} = n \Rightarrow n = 10$$

Do đó số đội viên là 10, số kẹo là 100, mỗi người nhận 10 kẹo.

Bài 258

Một số tự nhiên có hai chữ số có tổng các chữ số bằng 7. Nếu thêm chữ số 0 vào giữa hai chữ số ta được một số có 3 chữ số lớn hơn số đã cho là 180. Tìm số đó ?

Đáp số : 25.

Bài 259

Trong một trường hồi đầu năm học số học sinh trai và gái bằng nhau. Nhưng trong học kì I trường nhận thêm 15 học sinh gái và 5 học sinh trai từ nơi khác chuyển đến nên số học sinh gái chiếm 51% số học sinh của trường. Hỏi cuối học kì I trường có bao nhiêu học sinh trai, học sinh gái ?

GỢI Ý :

Đặt x là số học sinh nữ (bằng số học sinh nam) hồi đầu năm ta có

$$\frac{x + 15}{2x + 20} = \frac{51}{100}$$

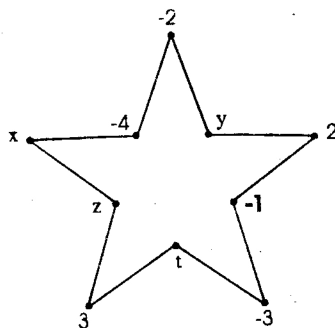
Đáp số : 245 học sinh trai, 255 học sinh gái

Bài 260

Ba lớp học tổ chức góp sách tặng các bạn nghèo được cả thẩy 358 cuốn; Tỉ số số cuốn sách góp của lớp A so với lớp B là $\frac{6}{11}$. Tỉ số số cuốn sách góp của lớp A so với lớp C là $\frac{7}{10}$. Hỏi mỗi lớp góp được bao nhiêu cuốn sách.

Đáp số : 84c; 154c, 120c

Bài 261



Tìm các số x, y, z, t trên hình bên, sao cho tổng của 4 số bất kì tại 4 điểm thẳng hàng là số không đổi.

GỢI Ý :

Tính tổng của 4 số trên hai đường thẳng giao nhau tại y :

$x - 4 + y + 2 = -2 + y - 1 - 3$

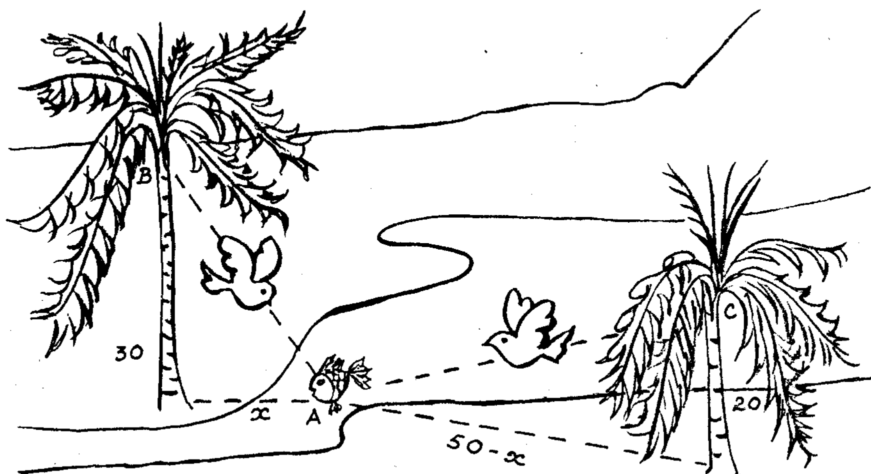
và có phương trình bậc nhất ẩn x.

Lại tính tiếp tổng của 4 số trên hai đường thẳng qua z để xác định t.

Bài 262

Bài toán cổ Arập

Hai cây cọ mọc đối diện nhau ở hai bên bờ sông. Một cây cao 30 khuỷu tay, cây kia cao 20 khuỷu tay. Khoảng cách giữa hai cây là 50 khuỷu tay. Trên đỉnh mỗi cây có một con chim. Bỗng nhiên cả hai con chim đều nhìn thấy một con cá bơi trên mặt nước giữa hai cây. Chúng cùng bổ nhào xuống con cá và cùng đạt đến đích một lúc. Hỏi khoảng cách từ gốc cây cao hơn đến con cá là bao nhiêu ?



GIẢI

Gọi khoảng cách từ gốc cây cao đến con cá là x

Từ hình vẽ, theo định lí Pitago ta có :

$$AB^2 = 30^2 + x^2, \quad AC^2 = 20^2 + (50 - x)^2$$

Vì hai con chim bay với thời gian bằng nhau (giả sử cùng vận tốc) nên các khoảng cách bay được bằng nhau, ta có phương trình

$$30^2 + x^2 = 20^2 + (50 - x)^2 .$$

$$\Leftrightarrow 100x = 2000 \Leftrightarrow x = 20.$$

Vậy con cá bơi trên mặt nước cách cây cọ cao là 20 khuỷu tay.

Bài 263

Bài toán cổ Ấn Độ (của nhà Toán học Ấn Độ Sritđôkhara)

Một phần năm đàn ong đậu trên hoa táo, một phần ba đậu trên hoa cúc, số ong đậu trên hoa hồng bằng ba lần hiệu số của ong đậu trên hoa táo và hoa cúc; còn lại một con ong đậu trên hoa mai. Hỏi đàn ong có bao nhiêu con ?

Đáp số : 15 con ong

Bài 264

Bài toán của nhà toán học cổ Ấn Độ Bkhascara

Một người nói với bạn : "Nếu anh cho tôi 100 rupi (tiền Ấn độ) thì tôi sẽ giàu gấp đôi anh !" Người kia trả lời : "Nếu anh đưa cho tôi chỉ 10 rupi thôi thì tôi sẽ giàu gấp sáu lần anh". Hỏi mỗi người có bao nhiêu tiền ?

GIẢI

Gọi x là số tiền của người thứ hai sau khi đã cho người thứ nhất 100 rupi, khi đó số tiền của người thứ nhất là 2x. Như vậy số tiền thực có của người thứ hai là x + 100, của người thứ nhất là 2x − 100. Theo lời người thứ hai ta có phương trình

$$x + 100 + 10 = 6(2x - 100 - 10) \Rightarrow x = 70.$$

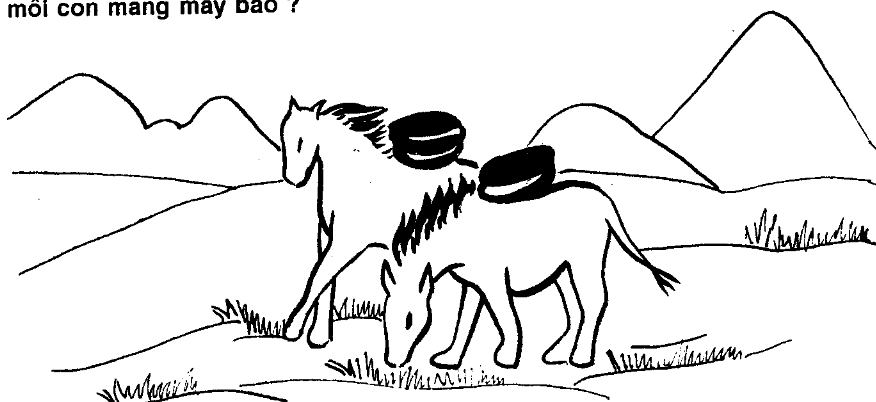
Vậy người thứ nhất có : 2 . 70 − 100 = 40 rupi

Người thứ hai có 70 + 100 = 170 rupi

Bài 265

Bài toán cổ

Ngựa và La đi cạnh nhau cùng chở hàng trên lưng. Ngựa than thở : "Hành lí của mình nặng quá". La đáp : "Cậu than thở nỗi gì ? Nếu tôi lấy của cậu một bao thì hành lí của tôi nặng gấp đôi của cậu; còn nếu cậu lấy của tôi một bao thì hành lý của cậu mới bằng của tôi" Hỏi xem Ngựa và La mỗi con mang mấy bao ?



GỢI Ý :

Gọi x là số bao mà La phải chở thì số bao mà Ngựa phải chở là x − 1

Ta có phương trình : x + 1 = 2(x − 1)

Bài 266

Có ba ôtô chạy trên đường AB. Ôtô thứ nhất chạy từ A đến B, ô tô thứ hai chạy từ B đến A khởi hành cùng một lúc. Khi ô tô thứ nhất chạy tới B thì ô tô thứ ba bắt đầu chạy đi từ B về A và về tới A cùng một lúc với ô tô thứ hai. Tại giữa quãng đường AB một người nhận thấy rằng sau khi ô tô thứ nhất đi qua 10 phút thì thấy ô tô thứ hai đi qua, sau đó 20 phút nữa thì thấy ô tô thứ ba đi qua. Vận tốc ô tô thứ ba là 120 km/h. Hỏi vận tốc của mỗi xe và chiều dài quãng đường AB ?

GỢI Ý :

Quy đơn vị thời gian ra giờ : 10 phút = $\frac{1}{6}$ giờ, 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ. So sánh thời gian đi của 3 xe để tìm thời gian đi của xe thứ 3.

Đáp số : Quảng đường AB : 40 km, Vận tốc xe thứ nhất 60 km/h
Vận tốc xe thứ hai 40 km/h

Bài 267

Một người đi bộ (vận tốc không thay đổi) từ A đến B nhận thấy cứ 15 phút lại có một xe buýt đi cùng chiều vượt qua và cứ 10 phút lại gặp một xe chạy chiều ngược lại. Biết rằng các xe buýt đều chạy với cùng vận tốc, khởi hành sau những quãng thời gian bằng nhau và không dừng lại trên đường (trên chiều từ A đến B cũng như trên chiều ngược lại).

Hỏi cứ bao nhiêu phút thì các xe buýt lần lượt rời bến.

GIẢI



Gọi x là số phút cách nhau của hai xe buýt rời bến (A hoặc B) Giả sử xe thứ nhất đuổi kịp người đi bộ tại C thì xe thứ hai chạy cùng hướng đến C sau x phút. Trong 15 phút người đi bộ đi từ C đến D, và xe thứ hai đuổi kịp người đi bộ tại D. Như vậy người đi bộ từ C đến D 15 phút, xe buýt đi mất (15 − x) phút, tức là xe buýt chạy hết $\left(\frac{15 - x}{15}\right)$ phút trên quãng đường người đi bộ đi trong 1 phút.

Giả sử người đi bộ gặp xe thứ nhất (chiều từ B đến A) tại điểm E và gặp xe thứ hai tiếp theo tại F sau 10 phút. Xe này đến E trong x − 10 phút. Quãng đường EF người đi bộ trong 10 phút thì xe buýt đi trong x − 10 phút. Quãng đường người đi bộ đi trong 1 phút thì xe buýt đi trong $\left(\frac{x - 10}{10}\right)$ phút, vì tốc độ người đi bộ không đổi nên ta có phương trình

$$\frac{15 - x}{15} = \frac{x - 10}{10} \Rightarrow x = 12$$

Vậy khoảng thời gian hai xe xuất bến là 12 phút.

Bài 268

Một ca nô xuôi theo dòng nước (không nghỉ) từ bến cảng A đến bến cảng B trong 5 giờ. Nó ngược dòng (với vận tốc riêng như cũ và cũng không nghỉ) từ B về A mất 7 giờ.

Hỏi một cái bè trôi xuôi từ A đến B (theo vận tốc của dòng nước) trong mấy giờ ?

GIẢI

Gọi k là tỉ số giữa vận tốc riêng của canô (vận tốc canô trong nước đứng yên) với vận tốc dòng nước thì tốc độ xuôi dòng của canô bằng (k + 1) lần vận tốc dòng nước và vận tốc ngược dòng của canô bằng (k − 1) lần vận tốc dòng nước và ta có phương trình :

$$\frac{k - 1}{k + 1} = \frac{5}{7} \Rightarrow k = 6$$

Như vậy nếu vận tốc dòng nước là x km/h thì vận tốc riêng của ca nô là 6x km/h. Vận tốc xuôi dòng của ca nô là 7x km/h và ngược dòng là 5x km/h. Gọi a (km) là khoảng cách hai bến A, B thì thời gian bè trôi xuôi dòng từ A đến B là $t = \frac{a}{x}$h.

Thời gian ngược dòng của canô là $\frac{a}{5x} = \frac{t}{5}$h

Thời gian xuôi dòng của canô là $\frac{a}{7x} = \frac{t}{7}$.h

Ta có phương trình $\frac{a}{5x} - \frac{a}{7x} = \frac{t}{5} - \frac{t}{7} = 2$

$$\Leftrightarrow t\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) = 2 \Leftrightarrow t = 35h$$

Vậy thời gian trôi xuôi từ A đến B của bè là 35 giờ.

Bài 269

Để nạo vét một khúc sông, một máy xúc, theo kế hoạch, cần nạo vét $50m^3$/ngày . Khi thực hiện, máy xúc đã xúc $57m^3$ / ngày, do đó đã hoàn thành sớm hơn dự định 1 ngày và còn xúc vượt khối lượng $13m^3$. Hỏi theo kế hoạch cần nạo vét bao nhiêu mét khối đất ?

GỢI Ý :

Thời gian hoàn thành bằng khối lượng công việc chia cho năng suất. Đặt x là số mét khối đất nạo vét theo kế hoạch, ta có : $\frac{x}{50} = \frac{x + 13}{57} + 1$.

Đáp số : $500m^3$

Bài 270

Một bình thủy đựng 2,5 lít nước $90^\circ C$. Cần pha với bao nhiêu lít nước ở nhiệt độ $20^\circ C$ để có nước ở nhiệt độ $40^\circ C$

GỢI Ý :

Gọi x là số lít nước ở nhiệt độ 20° ta có phương trình

$$x(40 - 20) = 2,5(90 - 40)$$

Đáp số : $6\frac{1}{4}$ lít

Bài 271

Một hội trường có đặt một số hàng ghế đủ 300 chỗ ngồi. Nếu mỗi hàng ghế thêm 2 chỗ và bớt đi 3 hàng ghế thì số chỗ ngồi chỉ còn 289. Hỏi lúc đầu có bao nhiêu hàng ghế.

GỢI Ý :

Số chỗ của hội trường chia cho số hàng ghế bằng số chỗ ngồi trên một hàng ghế.

Đáp số : 20 hàng ghế

Bài 272

Một cửa hàng có 472 lít nước mắm đựng trong hai cái thùng. Vì có sự cố nên người ta lấy bớt 50 lít ở thùng thứ nhất đổ sang thùng thứ hai. Lúc bấy giờ thùng thứ hai hơn thùng thứ nhất 24 lít.

Tính xem lúc đầu mỗi thùng chứa bao nhiêu lít nước mắm ?

GỢI Ý :

Gọi x là số lít nước mắm trong thùng thứ nhất thì thùng thứ hai chứa 472 – x lít.

Đáp số : 274 lít, 198 lít

Bài 273

Có ba người đóng số tiền học phí bằng nhau. Người thứ nhất đóng toàn bằng các tờ giấy bạc 5000đ, người thứ hai toàn bằng giấy bạc 2000đ và người thứ ba toàn bằng giấy bạc 1000đ. Người thủ quỹ kiểm lại thấy ba người đóng tất cả 255 tờ giấy bạc các loại. Hỏi mỗi người đóng bao nhiêu tiền học phí ?

Đáp số : 150.000đ

Bài 274

Nhà toán học Nga nổi tiếng *V.I.Arnold* (sinh năm 1937) đã kể lại : "Sự chấn động" toán học đầu tiên xảy ra với tôi khi tôi được học thầy giáo đáng kính I.V. Moroskin. Tôi vẫn nhớ bài toán :

Hai bà lão khởi hành đồng thời từ hai địa điểm khác nhau và đi từ địa điểm này đến địa điểm kia. Họ gặp nhau lúc giữa trưa và bà lão thứ nhất đến đích lúc 4 giờ chiều, bà lão thứ hai lúc 9 giờ tối. Hỏi họ đã khởi hành vào giờ nào ?

Lúc đó tôi chưa được học đại số. Suy nghĩ tìm "lời giải số học" của bài toán, lần đầu tiên tôi cảm nhận được niềm vui sáng tạo và việc hướng đến niềm vui đó đã giúp tôi trở thành nhà toán học.

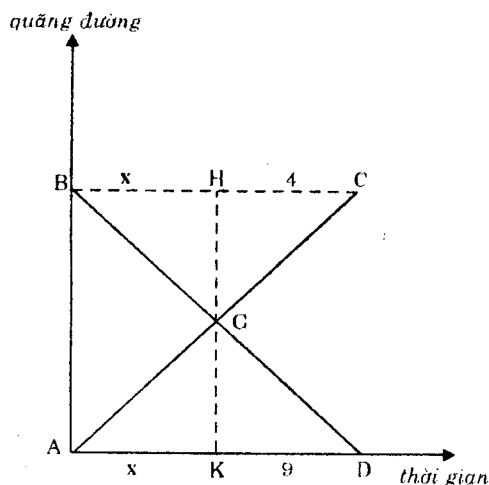
Hãy tìm "lời giải số học" và "lời giải đại số" của bài toán trên.

GỢI Ý :

Bài toán có nhiều cách giải. Sau đây là hai cách giải dùng đại số và hình học.

Cách 1. Gọi x là số giờ mà mỗi bà lão đã đi cho đến lúc gặp nhau (sau x giờ hai bà lão đã đi hết đoạn đường giữa hai địa điểm). Bà thứ nhất đi hết đoạn đường mất x + 4 giờ, bà thứ hai mất x + 9 giờ. Phải giải phương trình

$$\frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+9} = \frac{1}{x}$$



Cách 2. Gọi hai địa điểm là A và B. Vẽ đồ thị chuyển động của hai bà lão : AC và BD. Hai đồ thị cắt nhau tại G. AK = BH = x, HC = 4 và KD = 9. Các tam giác đồng dạng cho ta :

$$\frac{x}{4} = \frac{KG}{HG} \text{ và } \frac{9}{x} = \frac{KG}{HG}.$$

Suy ra $\frac{x}{4} = \frac{9}{x}$ và x = 6.

• MỘT CHÚT LỊCH SỬ

Từ 1600 năm trước Công nguyên, người Ai Cập đã biết giải phương trình, bằng cách mà ngày nay chúng ta gọi là "giả thiết tạm". Nội dung các bài toán và cách giải có thể diễn đạt theo ngôn ngữ đại số hiện nay như sau :

Bài toán 1. Một số cộng với $\frac{1}{7}$ của nó bằng 19. Tìm số ấy.

Giải : Gọi số phải tìm là x. Ta có :

$$x + \frac{1}{7}x = 19.$$

Giả sử đáp số là 7. Nhưng $7 + \frac{1}{7}.7 = 8$ chứ không bằng 19. Mà 19 bằng 8 nhân với $\frac{19}{8}$. Vậy giá trị đúng của x phải bằng 7 nhân với $\frac{19}{8}$, tức là bằng $\frac{133}{8}$.

Bài toán 2. Một số cộng với một nửa của nó bằng 16. Số đó bằng bao nhiêu ?

Bài toán 3. Hãy chia 100 cái bánh cho 10 người, trong đó có người chủ, người đốc công và người giữ cửa, mỗi người hai phần.

§6. TÍNH CHẤT CỦA THỨ TỰ TRONG TẬP HỢP CÁC SỐ HỮU TỈ. BẤT ĐẲNG THỨC

1. Thứ tự các số

Cho a, b $\in$ **Q** nếu $a - b$ là số dương, ta nói a lớn hơn b, kí hiệu $a > b$; nếu $a - b$ là số âm, ta nói a nhỏ hơn b, kí hiệu $a < b$.

Ta nói tập hợp **Q** được sắp thứ tự, nghĩa là cho hai số a, b $\in$ **Q** thì phải xảy ra một và chỉ một trong ba trường hợp : hoặc $a > b$, hoặc $a = b$, hoặc $a < b$.

Các tính chất của quan hệ thứ tư :

a) Tính bắc cầu

$$\begin{cases} a > b \\ b > c \end{cases} \Rightarrow a > c$$

b) Tính đơn điệu

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c, \text{ với mọi } c$$

Hệ quả

* $a + c > b + c \Rightarrow a > b$
* $a + c > b \Rightarrow a > b - c$
* $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

c) Liên hệ với phép nhân

* $a > b$ và $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

* $a > b$ và $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

* $a > b$ và $c = 0 \Rightarrow ac = bc$

CHÚ Ý : Ta viết $a \geq b$ có nghĩa là $a > b$ hoặc $a = b$. Ta viết $a \leq b$ có nghĩa là $a < b$ hoặc $a = b$.

$a > b$, $a \geq b$, $a < b$, $a \leq b$ là các *bất đẳng thức*.

2. Chứng minh bất đẳng thức

Chứng minh một bất đẳng thức là lập luận để khẳng định tính đúng đắn của bất đẳng thức đó. Để chứng minh bất đẳng thức ta vận dụng các tính chất của quan hệ thứ tự của các số hữu tỉ đã trình bày trên đây. Thông thường người ta sử dụng các tính chất bắc cầu, đơn điệu, liên hệ với phép nhân để biến đổi các bất đẳng thức cần chứng minh về các bất đẳng thức quen thuộc, đơn giản đã được chứng minh là đúng.

Bài 275

Cho $x, y \in Q$, m và n là các số nguyên dương. Chứng minh :

a) Nếu $0 < x < 1$ và $m > n$ thì $x^m < x^n$;

b) Nếu $x > 1$ và $m > n$ thì $x^m > x^n$;

c) Nếu $0 < x < y$ thì $x^3 < y^3$.

GỢI Ý :

a) $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^k < 1$ với mọi k nguyên dương. Vì $m > n \Rightarrow k = m-n$ nguyên dương. Ta có : $x^{m-n} < 1$. Nhân hai vế bất đẳng thức sau cùng với $x^n > 0$: $x^{m-n}x^n < 1 . x^n \Rightarrow x^m < x^n$

b) Tương tự câu a)

c) Từ $x > 0$ và $x < y$ suy ra $x^2 < xy$. Từ $y > 0$ và $x < y$ suy ra $xy < y^2$. Theo tính chất bắc cầu ta được : $x^2 < y^2$

$$\left.\begin{array}{l} x^2 < y^2 \text{ và } x > 0 \Rightarrow x^3 < xy^2 \\ x < y \text{ và } y^2 > 0 \Rightarrow xy^2 < y^3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 < y^3$$

Bài 276

Cho các số hữu tỉ $a > b > 0$ và $c > d > 0$. Chứng minh :

a) $ac > bd$ **b)** $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

GỢI Ý :

a) Hãy chứng minh $ac > bc$ và $bc > bd$ rồi dùng tính chất bắc cầu.

b) $\frac{a}{d} > \frac{b}{c} \Leftrightarrow \frac{a}{d} - \frac{b}{c} = \frac{ac - bd}{cd} > 0$. Sử dụng kết quả câu a) để suy ra kết luận.

Bài 277

Cho số hữu tỉ $x \neq 0$. Chứng minh:

a) $x + \frac{1}{x} \geq 2$ **nếu** $x > 0$; **b)** $x + \frac{1}{x} \leq -2$ **nếu** $x < 0$

GỢI Ý :

a) Ta có : $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$

b) Tương tự câu a)

Ghi chú : Kết quả bài toán có thể phát biểu như sau: Tổng của một số hữu tỉ với nghịch đảo của nó không nhỏ hơn 2 nếu nó dương và không lớn hơn -2 nếu nó âm. Từ đó suy ra các kết quả sau :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \text{ nếu } x, y > 0 \text{ và } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2 \text{ nếu } x, y < 0$$

Bài 278

Chứng minh rằng với các số hữu tỉ a, b, c tùy ý ta có :

a) $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ **b)** $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$;

c) $a^2 + b^2 \geq ab$; **d)** $a^2 + ab + b^2 \geq 0$.

GỢI Ý :

a) $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$; $\frac{a^2+b^2}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{4} \geq 0$

b) $2(a^2+b^2+c^2) - 2(ab+bc+ca) = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$

c) $a^2 + b^2 - ab = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \geq 0$

d) Tương tự câu c)

Chú ý. Bất đẳng thức $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ được gọi là *bất đẳng thức Cauchy* (Côsi).

Bài 279

Cho các số hữu tỉ a, b khác 0. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

GỢI Ý :

Ta có : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2$

$$= \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right) \geq 0$$

Chú ý : Để cho gọn trong cách viết và biến đổi dễ dàng ta có thể đặt $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = u$. Khi đó, chứng minh bất đẳng thức đã cho tương đương với chứng minh rằng $u^2 - u - 2 \geq 0$.

Bài 280

Cho các số hữu tỉ dương a, b, c. Chứng minh :

a) $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$; **b)** $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$

GỢI Ý :

a) Quy đồng mẫu thức rồi áp dụng kết quả bài 278b)

b) Ta có : $\frac{a}{a+b+c} < \frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$

$\frac{b}{a+b+c} < \frac{b}{b+c} < \frac{a+b}{a+b+c}$

$\frac{c}{a+b+c} < \frac{c}{c+a} < \frac{b+c}{a+b+c}$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức đã nhận được, ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài 281

Chứng minh rằng trong một tam giác thì :

a) Nửa chu vi lớn hơn mỗi cạnh.

b) Trung tuyến nhỏ hơn nửa tổng hai cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh.

c) Trung tuyến nhỏ hơn nửa chu vi.

GỢI Ý :

Tìm cách vận dụng mệnh đề: "Trong một tam giác mỗi cạnh nhỏ hơn tổng hai cạnh kia".

Bài 282

Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh

a) $\frac{1}{a+b}$; $\frac{1}{b+c}$; $\frac{1}{c+a}$ **cũng là độ dài các cạnh của một tam giác khác.**

b) $\frac{1}{a+b-c} + \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

GỢI Ý :

a) Nếu ba số dương thỏa mãn tính chất tổng của mỗi hai số lớn hơn số còn lại thì các số đó là số đo của các cạnh của một tam giác nào đó. Ở đây ta phải chứng minh : từ giả thiết : $a + b > c$; $b + c > a$; $a + c > b$ thì có :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{c+a};\ \frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{1}{a+b};\ \frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}>\frac{1}{b+c}$$

Thực vậy :

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}>\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}>\frac{2}{c+a+c+a}=\frac{1}{c+a}$$

Các bất đẳng thức còn lại được chứng minh tương tự. Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng tính chất: "hai phân số dương cùng tử số, phân số nào có mẫu nhỏ hơn thì lớn hơn"

b) Để ý rằng với hai số dương x, y thì ta có : $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$

Áp dụng kết quả này ta có :

$$\frac{1}{a+b-c}+\frac{1}{b+c-a}\geq\frac{4}{(a+b-c)+(b+c-a)}=\frac{2}{b}$$

Làm tương tự đối với các tổng khác ta suy ra điều phải chứng minh

Bài 283

Chứng minh rằng :

a) Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số đó bằng nhau.

b) Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số bằng nhau.

GỢI Ý :

a) Gọi các số đó là x và y. Đặt x + y = S. Theo bất đẳng thức Côsi thì :

$$xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\Rightarrow xy\leq\frac{S^2}{4}$$

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi x = y. Khi đó tích xy đạt giá trị lớn nhất là $\frac{S^2}{4}$.

b) Lập luận như câu a)

Chú ý

1) Bài toán trên có nội dung hình học như sau :

a) Trong các hình chữ nhật có cùng một chu vi thì hình vuông có diện tích lớn nhất.

b) Trong các hình chữ nhật có cùng diện tích thì hình vuông có chu vi nhỏ nhất.

2) Có thể áp dụng kết quả bài toán này để giải một số bài toán về tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Bài 284

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $P = \dfrac{x^2}{1 + x^4}$

GỢI Ý :

Viết $P = \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2} + x^2}$ thì P đạt giá trị lớn nhất khi tổng $\dfrac{1}{x^2} + x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Vì $\dfrac{1}{x^2} . x^2 = 1$ không đổi nên tổng $\dfrac{1}{x^2} + x^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với giá trị của x sao cho $\dfrac{1}{x^2} = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 1$; khi đó $P = \dfrac{1}{2}$.

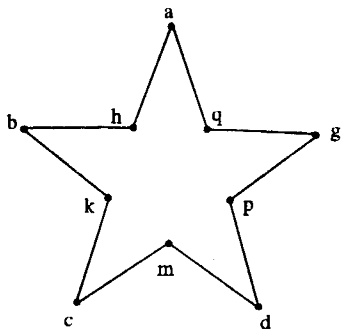
Bài 285

a) Tìm giá trị $x > 0$ sao cho $Q = \dfrac{(2 + x)(x + 8)}{x}$ **đạt giá trị nhỏ nhất.**

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng : $R = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ **với $x > 0$, $y > 0$ thỏa mãn $x + y = 6$.**

Đáp số : a) $x = 4$ b) $x = 3, y = 3$

Bài 286



Thay đủ các số từ 1 đến 10 vào các chữ trên hình bên, sao cho bất kì ba số nào nằm tại các điểm trên một cánh sao cũng có tổng S như nhau và S có giá trị nhỏ nhất có thể được.

GỢI Ý :

Tính tổng các số trên cả 5 cánh :

$$5S = (a + b + ... + p + q) + (h + k + m + p + q)$$
$$= (1 + 2 + ... + 9 + 10) + (h + k + m + p + q)$$

Mà $h + k + m + p + q \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$

Suy ra S nhỏ nhất là 14, khi $\{h, k, m, p, q\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Chú ý rằng với hai cánh sao không có điểm chung, ví dụ hbk và pgq, thì phải có $h + k \neq p + q$. Mặt khác, vì $S = 14$, nên phải có một cánh sao mang ba số 10, 1, 3. Suy ra lời giải.

Thử xét trường hợp $S > 14$.

§7. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

1. Cho A(x) và B(x) là hai biểu thức chứa một biến x. Khi nói $A(x) > B(x)$ (hoặc $A(x) < B(x)$) là một bất phương trình ta hiểu là tìm các giá trị của biến x để giá trị của A(x) lớn hơn (hoặc bé hơn) giá trị của B(x). Mỗi giá trị của biến thỏa mãn bất phương trình gọi là một nghiệm của bất phương trình đó.

Chú ý : Ta cũng xét các bất phương trình dạng

$$A(x) \geq B(x) \text{ hoặc } A(x) \leq B(x).$$

2. Hai bất phương trình tương đương là hai bất phương trình có cùng một tập hợp nghiệm. Biến đổi một bất phương trình thành một bất phương trình tương đương gọi là phép biến đổi tương đương.

Định lí 1. Nếu f(x) là một đa thức thì

$$A(x) + f(x) > B(x) + f(x) \Leftrightarrow A(x) > B(x)$$

Định lí 2

a) $C.A(x) > C.B(x) \Leftrightarrow A(x) > B(x)$ nếu C là hằng số dương

b) $C.A(x) < C.B(x) \Leftrightarrow A(x) > B(x)$ nếu C là hằng số âm.

3. Mọi bất phương trình có thể biến đổi tương đương về dạng :

$$ax + b > 0 \ (a \neq 0)$$

$$\text{hoặc } ax + b < 0 \ (a \neq 0)$$

được gọi là bất phương trình bậc nhất một ẩn (là x)

Nếu a > 0 thì nghiệm của ax + b > 0 là $x > \frac{-b}{a}$

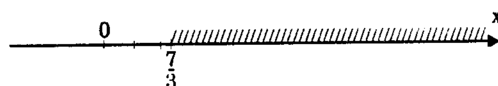
Nếu a < 0 thì nghiệm của ax + b > 0 là $x < \frac{-b}{a}$

4. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình trên trục số bằng cách vẽ trục số rồi gạch bỏ những đoạn của trục số không chứa các điểm biểu diễn nghiệm của bất phương trình.

Ví dụ : Biểu diễn nghiệm của bất phương trình

$$7 - 3x > 0$$

Ta có nghiệm bất phương trình là $x < \frac{7}{3}$, được biểu diễn trên trục số như sau :



Bài 287

Chỉ rõ mỗi bất phương trình sau đây là vô nghiệm

a) $-4x^2 + 4x - 2 > 0$ **b)** $9x^2 - 6x \leq -2$

GIẢI

a) Giả sử có số hữu tỉ $x = a$ là nghiệm, ta có bất đẳng thức

$$-4a^2 + 4a - 2 > 0 \Leftrightarrow -4a^2 + 4a - 1 - 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -(2a-1)^2 - 2 > 0 \Leftrightarrow -(2a-1)^2 > 2.$$

Nhưng bất đẳng thức cuối cùng sai. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x = a$ là nghiệm. Vậy bất phương trình đã cho là vô nghiệm.

b) Giải tương tự câu a)

Bài 288

Chứng tỏ rằng mọi số hữu tỉ đều là nghiệm của bất phương trình sau

a) $-x^2 + x - \frac{1}{2} \le 0$ **b)** $\frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 26 > 0$

c) $4x^2 - 5x + 3 > 0$ **d)** $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{4} > 0$.

GỢI Ý :

a) Viết vế trái dưới dạng hiệu của một số âm và bình phương của biểu thức của x : $f(x) = \frac{-1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

b) Vế trái là tổng của số dương và bình phương một biểu thức của x

$\frac{4}{9}x^2 + \frac{20}{3}x + 26 = \left(\frac{2}{3}x + 5\right)^2 + 1 > 0$, với x là một số hữu tỉ bất kì

c) $4x^2 - 5x + 3 = \left(2x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{23}{16} > 0 \quad \forall x \in \mathbf{Q}$

d) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + \frac{5}{4} = [(x-1)(x-4)][(x-2)(x-3)] + \frac{5}{4} =$

$= (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 6) + \frac{5}{4} = (x^2 - 5x + 4)^2 + 2(x^2 - 5x + 4) + 1 + \frac{1}{4}$

$= (x^2 - 5x + 5)^2 + \frac{1}{4} > 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$

Bài 289

Xét xem mỗi cặp bất phương trình sau đây có tương đương không :

a) $4x^2 - 4x + 5 \le 0$ **và** $-x^2 + 2x - 2 \ge 0$

b) $2x^2 - 4x + 5 > 0$ **và** $-x^2 + 8x - 17 \le 0$

c) $3x^3 - 5x^2 + 6x - 4 > 0$ **và** $\frac{5}{3}x^2 - 2x < x^3 - \frac{4}{3}$

GIẢI

a) Ta có : $4x^2 - 4x + 5 \le 0 \Leftrightarrow (2x - 1)^2 + 4 \le 0$ vô nghiệm (vì vế trái là tổng của một số dương và một biểu thức lấy giá trị không âm với mọi giá trị của biến).

Bất phương trình

$$-x^2 + 2x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow -(x - 1)^2 - 1 \ge 0$$

cũng vô nghiệm. Tập hợp các nghiệm của bất phương trình thứ nhất là tập hợp rỗng, tập hợp các nghiệm của bất phương trình thứ hai cũng là tập hợp rỗng. Các tập hợp nghiệm của hai bất phương trình bằng nhau. Do đó hai bất phương trình tương đương.

b) Ta có :

$$2x^2 - 4x + 5 > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 2 + 3 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 1)^2 + 3 > 0$$

Có tập hợp nghiệm là mọi số hữu tỉ

$$-x^2 + 8x - 17 \le 0 \Leftrightarrow -(x - 4)^2 - 1 \le 0$$

cũng có tập hợp nghiệm là tập hợp các số hữu tỉ. Vậy hai bất phương trình tương đương.

c) $3x^3 - 5x^2 + 6x - 4 > 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 4 > 5x^2 - 6x$

$$\Leftrightarrow 5x^2 - 6x < 3x^3 - 4 \qquad (1)$$

Vì $\frac{1}{3} > 0$ nên :

$$\frac{1}{3}(5x^2 - 6x) < \frac{1}{3}(3x^3 - 4)$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}x^2 - 2x < x^3 - \frac{4}{3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$3x^3 - 5x^2 + 6x - 4 > 0 \Leftrightarrow \frac{5}{3}x^2 - 2x < x^3 - \frac{4}{3}.$$

Bài 290

Giải các bất phương trình và biểu diễn các nghiệm trên trục số

a) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{6} - x > \dfrac{2x^2 - 8x + 1}{12}$ **(1)**

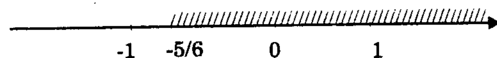
b) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < x - \dfrac{x-3}{4}$ **(2)**

GIẢI

a) (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 7x - 2}{6} > \dfrac{2x^2 - 8x + 1}{12}$

$\Leftrightarrow \dfrac{-6x - 5}{12} > 0 \Leftrightarrow -6x - 5 > 0$

$\Leftrightarrow x < \dfrac{-5}{6}$



Tập hợp nghiệm của bất phương trình biểu diễn bởi các điểm trên trục số không bị gạch chéo.

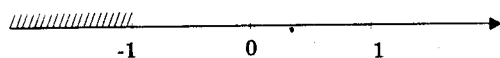
b) $\dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x-2}{3} < x - \dfrac{x-3}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6(x-1) - 4(x-2)}{12} < \dfrac{12x - 3(x-3)}{12}$

$\Leftrightarrow 6(x - 1) - 4(x - 2) < 12x - 3(x - 3)$

$\Leftrightarrow 2x + 2 < 9x + 9 \Leftrightarrow 7x + 7 > 0$

$\Leftrightarrow x > -1$



Tập hợp nghiệm biểu diễn bởi các điểm của trục số không bị gạch chéo.

Bài 291

Cho hai bất phương trình

$$x + \frac{5}{8} < \frac{3x - 1}{12} \text{ và } x - \frac{x - 3}{4} \geq \frac{x - 1}{2} - \frac{x - 2}{3}.$$

a) Tìm tập hợp nghiệm của mỗi bất phương trình.

b) Tìm tập hợp tất cả các số là nghiệm chung của hai bất phương trình.

Đáp số : a) $x < \frac{-17}{18}$ và $x \geq -1$

b) $-1 \leq x < \frac{-17}{18}$

Bài 292

Giải và biện luận : $(m - 2)x \geq (2m - 1)x - 3$

m là tham số.

GIẢI

$(m - 2)x \geq (2m - 1)x - 3 \Leftrightarrow (m + 1)x \leq 3$

a) $m + 1 \neq 0$:

$m > -1, (m + 1 > 0)$: $x \leq \frac{3}{m + 1}$

$m < -1, (m + 1 < 0)$: $x \geq \frac{3}{m + 1}$

b) $m + 1 = 0$

$m = -1$, bất phương trình có dạng :

$0.x \le 3$, được nghiệm với mọi x.

Bài 293

Giải và biện luận bất phương trình :

$$\frac{m(x-2)}{6} + \frac{x-m}{3} > \frac{x+1}{2}$$

(m là tham số).

GIẢI

$$m(x - 2) + 2(x - m) > 3(x + 1)$$

$$mx - 2m + 2x - 2m > 3x + 3$$

$$(m - 1)x > 4m + 3$$

a) $m - 1 > 0$, $(m > 1)$: $x > \dfrac{4m+3}{m-1}$

b) $m - 1 < 0$, $(m < 1)$: $x < \dfrac{4m+3}{m-1}$

c) $m - 1 = 0$, $(m = 1)$: $0x > 7$: vô nghiệm

Bài 294

Giải và biện luận : $mx - n > nx - m$

m, n là các tham số.

Đáp số : $(m - n)x > n - m$.

a) $m > n : x > -1$

b) $m < n : x < -1$

c) $m = n : 0.x > 0$ (vô nghiệm)

Bài 295

Giải và biện luận các bất phương trình tham số :

1) $mx + 1 > m^2 + x$;

2) $3 - mx < 2(x - m) - (m + 1)^2$

• PHƯƠNG TRÌNH CÓ DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

Để giải một phương trình có ẩn nằm trong dấu giá trị tuyệt đối, ta cần làm mất giá trị tuyệt đối, bằng cách xét giá trị của biến trong từng khoảng, dựa vào định nghĩa của giá trị tuyệt đối.

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Từ đó : $$|x + a| = \begin{cases} x + a \text{ nếu } x \geq -a \\ -(x + a) \text{ nếu } x < -a \end{cases}$$

Bài 296

Cho các phương trình :

a) $|x| = 2x - 1$

b) $|x| = -x - 5$

1. Giải phương trình thứ nhất.

2. Chứng minh phương trình thứ hai vô nghiệm.

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp II, Miền Bắc – 1968)

GỢI Ý :

1) Xét hai khoảng :

$x < 0$: $-x = 2x - 1$ $\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ không thỏa $x < 0$.

$x \geq 0$: $x = 2x - 1$ $\Rightarrow x = 1$.

Đáp số : Nghiệm của phương trình là $x = 1$

2) Xét trong hai khoảng

$x < 0$: $|x| = -x - 5 \Leftrightarrow -x = -x - 5 \Leftrightarrow 0.x = -5$ (vô nghiệm)

$x \geq 0$: $|x| = -x - 5 \Leftrightarrow x = -x - 5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$ (loại)

Bài 297

Giải phương trình : $2|x| - |x + 1| = 2$

GIẢI

Ta có : $|x| = \begin{cases} x \text{ nếu } x \geq 0 \\ -x \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$

và : $|x + 1| = \begin{cases} x + 1 \text{ nếu } x \geq -1 \\ -(x + 1) \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$

Ta lập bảng sau đây :

	$-\infty$	-1		0	$+\infty$
$2\|x\|$	$-2x$		$-2x$	0	$2x$
$\|x+1\|$	$-(x+1)$	0	$x + 1$		$x + 1$
$2\|x\| - \|x+1\|$	$-2x + (x+1)$		$-2x - (x+1)$		$2x - (x+1)$

Do đó, ta viết được :

$$2|x| - |x + 1| = \begin{cases} -2x + x + 1 \text{ với } x < -1 \\ -2x - x - 1 \text{ với } -1 \leq x < 0 \\ 2x - x - 1 \text{ với } x \geq 0 \end{cases}$$

Ta phải giải các phương trình trong từng khoảng như sau :

1) Với $x < -1$: $-2x + x + 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1$ (loại)

2) $-1 \leq x < 0$: $-2x - x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = -1$

3) Với $x \geq 0$: $2x - x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là -1 và 3.

Bài 298

Giải phương trình :

$$|x - 1| + |x + 2| + |x - 3| = 14.$$

GỢI Ý :

Các nhị thức trong các dấu giá trị tuyệt đối có nghiệm, xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là −2; 1; 3. Cho nên ta sẽ xét phương trình trong các khoảng

1) $x < -2$: $-3x + 2 = 14 \Leftrightarrow x = -4$

2) $-2 \le x < 1$: $-x + 6 = 14 \Leftrightarrow x = -8$ (loại)

3) $1 \le x < 3$: $x + 4 = 14 \Leftrightarrow x = 10$ (loại)

4) $x \ge 3$: $3x - 2 = 14 \Leftrightarrow x = \frac{16}{3}$

Kết quả : Phương trình có hai nghiệm là −4 và $\frac{16}{3}$

Bài 299

Giải phương trình : $|1 - x| - |x - 2| - |x - 3| = \frac{1}{2}$

Đáp số : $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{7}{2}$

Bài 300

Giải phương trình :

$$|x + 1| + 3|x - 1| = x + 2 + |x| + 2|x - 2|$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp II toàn quốc, 1979)

GỢI Ý :

Các nhị thức trong dấu giá trị tuyệt đối có nghiệm là −1, 1, 0, 2. Do đó ta xét phương trình trong các khoảng :

$x < -1$; $-1 \le x < 0$; $0 \le x < 1$; $1 \le x < 2$; $x \ge 2$

Ví dụ : với $x < -1$ thì :

$|x + 1| = -(x + 1)$; $|x - 1| = -(x - 1)$

$|x| = -x$; $|x - 2| = -(x - 2)$

Và ta có phương trình :

$$-(x+1) - 3(x-1) = x + 2 - x - 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

Với $-1 \le x < 0$, có phương trình :

$$(x+1) - 3(x-1) = x + 2 - x - 2(x-2)$$

$$\Leftrightarrow 0x = 2 \text{ (vô nghiệm)}$$

Giải bất phương trình đối với các trường hợp còn lại.

Đáp số : $x = -2$ hoặc $x \ge 2$

Bài 301

Giải phương trình : $$x + \frac{2a|x+a|}{x} = \frac{a^2}{x}$$

GIẢI

Phương trình đã cho tương đương với :

$$x^2 + 2a|x+a| - a^2 = 0 \quad \text{với } x \ne 0.$$

$$|x+a| = \begin{cases} x + a \text{ nếu } x \ge -a \\ -(x+a) \text{ nếu } x < -a \end{cases}$$

1) Với $x \ge -a$:

$$x^2 + 2a(x+a) - a^2 = 0 \quad \text{với } x \ne 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -a \quad \text{với } a \ne 0$$

2) Với $x < -a$:

$$x^2 - 2a(x+a) - a^2 = 0 \quad \text{với } x \ne 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+a)(x-3a) = 0 \quad \text{với } x \ne 0$$

$$x = 3a < -a \Leftrightarrow x = 3a \quad \text{với } a < 0.$$

Tóm lại :

$a = 0$: vô nghiệm

$a > 0$: một nghiệm $x = -a$

$a < 0$: một nghiệm và $x = 3a$.

Bài 302

Giải phương trình :

a) $2|x + a| - |x - 2a| = 3a;$

b) $x = 2|x - a| - 2|x - 2a|$

GỢI Ý :

Xét các trường hợp $a = 0$, $a < 0$, $a > 0$.

a) Nếu $a < 0$ thì $-a > 2a$ và phải xét phương trình trong các khoảng :

$x < 2a$; $2a \le x < -a$ và $x \ge -a$

Nếu $a > 0$ thì $2a > -a$ và phải xét phương trình trong các khoảng :

$x < -a$; $-a \le x < 2a$; $x \ge 2a$

b) Tương tự

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

Bài 303

Giải phương trình :

$$\left[\frac{\left(x - 4\frac{1}{2}\right) : 0{,}003}{\left(3\frac{1}{20} - 2{,}65\right) . 4 : \frac{1}{5}} - \frac{\left(0{,}3 - \frac{3}{20}\right) : 1\frac{1}{2}}{\left(1{,}88 + 2\frac{3}{25}\right) . \frac{1}{8}}\right] : 62\frac{1}{20} + 17{,}81 : 0{,}0137$$

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp II Miền Bắc, 1964)

GỢI Ý :

Bài này chỉ đòi hỏi tính cẩn thận, sự nhanh trí trong phép chuyển đổi số thập phân ra phân số và ghép các hạng tử :

Chẳng hạn : $0{,}3 - \frac{3}{20} = \frac{6}{20} - \frac{3}{20}$

Kết quả : $x = 6$.

Bài 304

Giải phương trình : $\dfrac{6b+7a}{6b}-\dfrac{3ax}{2b^2}=1-\dfrac{ax}{b^2-ab}$

Với những điều kiện nào thì phương trình có nghiệm ?

(Đề thi chọn học sinh giỏi cấp II Miền Bắc, 1966)

GỢI Ý :

– Điều kiện có nghĩa của phương trình : $b \neq 0,\ a \neq b$.

– Mẫu thức chung : $6b^2(b-a)$

– Đưa phương trình về dạng : $3a(3a-b)x = 7ab(a-b)$

Như vậy với điều kiện : $a \neq 0$ và $a \neq \dfrac{b}{3}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ thì phương trình có nghiệm $x = \dfrac{7b(a-b)}{3(3a-b)}$.

Bài 305

Giải phương trình : $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}x-3\right)-3\right]-3\right\}-3=0$

GỢI Ý :

Lần lượt chuyển -3 sang vế phải và nhân cả 2 vế của phương trình với 2. Kết quả : $x = 90$

Bài 306

Giải và biện luận phương trình : $\dfrac{4x-1}{x-1}=m+3$

Với giá trị nào của m thì phương trình có nghiệm âm ?

GỢI Ý :

Điều kiện $x \neq 1$, đưa phương trình về dạng : $(m-1)x = m+2$

a) $m = 1 \Leftrightarrow 0\,x = 3$. Phương trình vô nghiệm

b) $m \neq 1 \Rightarrow x = \dfrac{m+2}{m-1} \neq 1$

Muốn $x < 0$ thì $\dfrac{m+2}{m-1} < 0$. Lập bảng xét dấu ta có kết quả : $-2 < m < 1$.

Bài 307

Giải và biện luận phương trình : $\dfrac{ax-1}{x-1} + \dfrac{b}{x+1} = \dfrac{a(x^2+1)}{x^2-1}$

GỢI Ý :

Điều kiện $x \neq \pm 1$, phương trình được đưa về : $(a+b-1)x = a+b+1$

a) Với $a + b = 1$: Phương trình vô nghiệm

b) Với $a + b \neq 1$ và $a + b \neq 0$, nghiệm là : $x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1}$

c) $a + b = 0$ vô nghiệm

Bài 308

Giải các phương trình :

a) $(x^2-4)(x^2-10) = 72$; **b)** $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 2$;

c) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$; **d)** $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

GỢI Ý :

a) Đặt ẩn số phụ $y = x^2 - 7$

đưa về dạng $(y-3)(y+3) = 72$. *Đáp số :* $x = \pm 4$

b) Đặt ẩn số phụ $y = x + 4$

$(y-1)^4 + (y+1)^4 = 2$

$y^2(y^2+6) = 0 \Rightarrow y = 0$

c) Đưa về phương trình tích : $(x+1)(x+2)(2x+1) = 0$

Đáp số : $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = \dfrac{-1}{2}$

d) Vì $x = 0$ không là nghiệm của phương trình, chia hai vế cho x^2 ta được:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 = 0$$

Đặt $y = x + \frac{1}{x}$ ta được : $(y - 1)(y - 2) = 0$, suy ra $x = 1$.

Cũng có thể đưa về phương trình tích $(x - 1)^2(x^2 - x + 1) = 0$.

Bài 309

Trò chơi đoán số

Bạn A nói với B: "Bạn hãy nghĩ ra một số, đem nhân nó với 2, cộng kết quả với 3, lại cộng thêm số đã nghĩ ra, cộng thêm 1 rồi nhân hai lên, trừ đi số đã nghĩ ra, trừ tiếp cho 3, trừ tiếp số nghĩ ra rồi trừ tiếp cho 2. Nhân kết quả có được với 2 rồi cộng thêm 3. Bạn cho tôi biết kết quả cuối cùng là bao nhiêu, tôi sẽ nói ngay số mà bạn đã nghĩ." B vừa trả lời kết quả cuối cùng là 49 thì A nói ngay số B đã nghĩ là 5!

Các bạn giải thích cách tính của A và thử chơi xem. Chú ý: có thể thêm nhiều phép tính trung gian cho trò chơi rắc rối và hấp dẫn hơn !

GIẢI

B nghĩ ra số x và thực hiện đúng yêu cầu của A thì phải được biểu thức $8x + 9$

Bài 310

Một số có hai chữ số trong đó chữ số hàng chục gấp ba lần chữ số hàng đơn vị. Nếu đổi vị trí hai chữ số ta được một số nhỏ hơn số đã cho 18 đơn vị. Tìm số đó.

Đáp số : 31

Bài 311

Tỉ số của hai số bằng 1/5. Nếu tăng số thứ nhất thêm 3 đơn vị, giảm số thứ hai bớt 5 đơn vị thì tỉ số của chúng bằng 1/3. Tìm hai số đó.

Đáp số : 7; 35

Bài 312

Có một bể không có nước. Cho một vòi nước chảy vào đồng thời một vòi nước chảy ra trong 5 giờ thì được 1/8 dung tích bể nước. Hỏi nếu bể không chứa nước và chỉ mở vòi chảy vào thì sau bao lâu bể nước sẽ đầy, biết rằng năng suất vòi chảy ra bằng $\frac{4}{5}$ năng suất vòi chảy vào.

Đáp số : 8 giờ.

Bài 313

Một xe ô tô đi từ Hà Nội về Thanh Hóa. Sau khi đi được 43 km nó dừng lại 40 phút. Để về đến Thanh Hóa đúng giờ đã định nó phải đi với vận tốc bằng 1,2 lần vận tốc trước đó. Tính vận tốc lúc đầu, biết rằng quãng đường Hà Nội – Thanh Hóa dài 163 km.

Đáp số : 30km

Bài 314

Hai người đi bộ cùng khởi hành từ A để đến B. Người thứ nhất đi nửa thời gian đầu với vận tốc 5km/h, nửa thời gian sau với vận tốc 4km/h. Người thứ hai đi nửa quãng đường đầu với vận tốc 4km/h và nửa quãng đường sau với vận tốc 5km/h.

Hỏi người nào đến B trước ?

Đáp số : Người thứ Nhất.

Bài 315

Một bè nứa trôi tự do và một ca nô đồng thời rời bến A để xuôi dòng sông. Ca nô xuôi dòng được 96km thì quay trở về A, cả đi lẫn về hết 14 giờ. Khi về còn cách A 24km thì gặp bè nứa vẫn trôi. Tìm vận tốc dòng nước và vận tốc riêng của ca nô.

(Thi tuyển lớp 10 chuyên toán 1986)

GỢI Ý :

Gọi k là tỉ số vận tốc riêng của canô đối với vận tốc dòng nước ta có

$$\frac{96}{k+1} + \frac{72}{k-1} = 24 \Rightarrow k = 7$$

Thời gian đi và về của ca nô $\frac{96}{7x + x} + \frac{96}{7x - x} = 14$ (x vận tốc dòng nước)

Đáp số : 2 km/h; 14 km/h

Bài 316

Bán trứng

Văn hỏi Lý : "Hôm qua lũ gà nhà cậu đẻ bao nhiêu trứng ?" Lý trả lời : "Không nhớ nổi gà đẻ bao nhiêu quả trứng, chỉ biết rằng mình phải bán ba lần mới hết số trứng. Lần thứ nhất bán nửa số trứng và nửa quả trứng, lần thứ hai bán nửa số trứng còn lại và nửa quả trứng. Lần thứ ba bán nửa số trứng còn lại (sau hai lần bán) và nửa quả trứng thì vừa hết".

Đáp số : 7 quả trứng

Bài 317

Chia gia tài – Bài toán Euler (Ơle)

Nhà toán học Euler rất thích một bài toán như thế này :

Một người cha trước khi chết có viết di chúc chia gia tài cho các con như sau : Người con thứ nhất được 100 đồng vàng và $\frac{1}{10}$ số còn lại, người con thứ hai được chia 200 đồng vàng và $\frac{1}{10}$ số còn lại, người thứ ba được 300 đồng vàng và $\frac{1}{10}$ số còn lại ... Cứ tiếp tục như vậy thì toàn bộ gia tài được chia đều cho các con. Hỏi gia tài người cha để lại có bao nhiêu đồng vàng và mỗi người con được bao nhiêu ?

Đáp số : 8100 đồng vàng, 900 đồng mỗi con

Bài 318

Chứng minh với mọi số thực a, b, c ta có

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

b) $(a + b)^2(b + c)^2 \geq 4abc(a + b + c)$

GỢI Ý :

a) $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}\left[(a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2)\right]$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho mỗi hạng tử trong [ ].

b) $(a + b)^2(b + c)^2 = [ac + b(a + b + c)]^2$.

Sử dụng kết quả $(x + y)^2 \geq 4xy$.

Bài 319

Chứng minh với mọi số thực a, b, c không âm

$$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$$

(Thi học sinh giỏi Ôstralia 1971)

GỢI Ý :

Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$, xét hiệu

$$B = 3abc - a^2(b + c - a) - b^2(a + c - b) - c^2(a + b - c)$$

$B = (a - b)^2(a + b - c) + c(b - c)(a - c)$. Suy ra đpcm

Chú ý : Nếu $b \geq c \geq a \geq 0$ hoặc $a \geq c \geq b \geq 0$ thì sao ?

Bài 320

Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

a) $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

(Thi học sinh giỏi THCS toàn quốc 1994)

b) $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$

GỢI Ý :

a) $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = a^2 . \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 . \frac{a^2 + c^2}{2} + c^2 . \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho mỗi hạng tử ở vế phải đẳng thức cuối.

b) Giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$

$a^3 + b^3 + c^3 - (ab^2 + bc^2 + ca^2) = (a^2 - b^2)(a - c) + (b^2 - c^2)(b - c).$

Hãy nghĩ xem nếu a, b, c không thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c$ thì sao ?

Bài 321

Chứng minh với các số thực dương a, b, c thì

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

GỢI Ý :

Khai triển vế trái, nhóm các hạng tử thích hợp

Bài 322

Giải và biện luận các bất phương trình :

a) $m^2 + mx \geq 2x + 4$ (m là tham số)

b) $\dfrac{ax + b}{a - b} > \dfrac{ax - b}{a + b}$ với $a > 0, b > 0, a \neq b$

Bài 323

Giải phương trình : $||x + 2| - 3| = 1$

(Đề thi vào lớp chuyên toán Hà Nội, 1980)

GỢI Ý :

$$|A| = \alpha \Leftrightarrow A = \pm\alpha$$

$$|x + 2| - 3 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x + 2| = 4 \\ |x + 2| = 2 \end{array}\right.$$

Kết quả : −6 ; −4; 0; 2

Bài 324

Giải các phương trình :

a) $||x - 2| + 3| = 5$

b) $\dfrac{x+3}{4} - \dfrac{|x-4|}{9} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x+5}{36}$

c) $|x + 1| + 2|x - 3| = 10$

Đáp số : a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$

b) $x = \dfrac{1}{7}$ c) $x_1 = \dfrac{-5}{3}$, $x_2 = 5$

Bài 325

Giải và biện luận phương trình với tham số a :

$$|x - 3| + x = a \qquad (1)$$

GỢI Ý :

Nếu $x \geq 3$ thì (1) $\Leftrightarrow 2x - 3 = a \Rightarrow x = \dfrac{a+3}{2}$ nếu $a \geq 3$

Nếu $x < 3$ thì (1) $\Leftrightarrow 0x + 3 = a$

Kết luận : Nếu $a \geq 3$ thì (1) có nghiệm $x = \dfrac{a+3}{2}$

Nếu $a = 3$ thì (1) có vô số nghiệm là mọi số hữu tỉ $x < 3$

Nếu $a < 3$ thì (1) vô nghiệm.

Bài 326

Giải bất phương trình

$$|x - 1| + |2 - x| \geq x + 3.$$

(Đề thi vấn đáp tuyển sinh vào trường Đại học Sư phạm Mascova, LB Nga, 1998)

GỢI Ý :

Giải bất phương trình trong các khoảng : $x > 2$ (lúc đó $|x - 1| = x - 1$ và $|2 - x| = x - 2$) ; $1 \leq x \leq 2$ (lúc đó $|x - 1| = x - 1$ và $|2 - x| = 2 - x$) và $x < 1$ (lúc đó $|x - 1| = 1 - x$ và $|2 - x| = 2 - x$).

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

Bài 327

Phân tích thành nhân tử

a) $P = a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1$; b) $Q = a^{12} - 3a^6 + 1$

Bài 328

Phân tích thành nhân tử

a) $P = a^8 + a^4 + 1$; b) $Q = x^{10} + x^5 + 1$

Bài 329

Phân tích thành nhân tử

a) $P = a^3 - 6a^2 + 11a - 6$; b) $Q = x^3 - 19x - 30$

Bài 330

Phân tích thành nhân tử

$$Q = (x + y)^7 - x^7 - y^7$$

Bài 331

Chứng minh $f(x) = 8x^9 - 9x^8 + 1$ chia hết cho $g(x) = (x - 1)^2$

Bài 332

Với giá trị nào của a và b thì đa thức

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 + ax + b$$

chia hết cho đa thức $g(x) = x^2 - 3x + 4$

Bài 333

Phân tích thành nhân tử

a) $P = (a - x)y^3 - (a - y)x^3 + (x - y)a^3$

b) $Q = xy(x - y) + yz(y - z) + zx(z - x)$

Bài 334

Cho 4 số nguyên bất kì a, b, c, d. Chứng minh tích

$$P = (a - b)(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)(c - d)$$

chia hết cho 12

Bài 335*

Cho 5 số nguyên dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Chứng minh tích

$$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(a_1 - a_4)(a_1 - a_5)(a_2 - a_3) \times$$
$$\times (a_2 - a_4)(a_2 - a_5)(a_3 - a_4)(a_3 - a_5)(a_4 - a_5)$$

chia hết cho 288

Bài 336

Tìm tất cả các số tự nhiên m và n sao cho

$$2^m - 2^n = 1984$$

(Thi học sinh giỏi Nghĩa Bình 1984)

Bài 337

Tìm các giá trị nguyên của x để phân thức sau đây nhận giá trị nguyên

$$P = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - 29}{x^2 + 1}$$

Bài 338

Rút gọn biểu thức

a) $P = \dfrac{2b + a - \dfrac{4a^2 - b^2}{a}}{b^3 + 2ab^2 - 3a^2b} \cdot \dfrac{a^3b - 2a^2b^2 + ab^3}{a^2 - b^2}$

b) $Q = \dfrac{1}{a(a - b)(a - c)} + \dfrac{1}{b(b - a)(b - c)} + \dfrac{1}{c(c - a)(c - b)}$

Bài 339

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn hệ thức

$$\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0$$

Chứng minh rằng

$$\frac{a}{(b - c)^2} + \frac{b}{(c - a)^2} + \frac{c}{(a - b)^2} = 0$$

Bài 340

Giải phương trình

$$\frac{x - a}{bc} + \frac{x - b}{ac} + \frac{x - c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \qquad a, b, c \neq 0.$$

Bài 341

Với những giá trị nào của tham số m hai phương trình dưới đây có nghiệm chung

$$3mx + 1 = 2(m - x) \quad (1)$$

$$(5x - 1)m = 2x + 1 \quad (2)$$

Bài 342

Giải các phương trình

a) $\dfrac{3}{4x - 20} - \dfrac{15}{2x^2 - 50} + \dfrac{7}{6x + 30} = 0$

b) $\dfrac{2x - 3}{2x^2 + 3x} - \dfrac{x + 1}{2x^2 - 3x} = \dfrac{x + 6}{4x^3 - 9x}$

Bài 343

Giải và biện luận phương trình theo tham số m

$$\frac{x + 1}{x + 2 + m} = \frac{x - 1}{x + 2 - m}$$

Bài 344

Tìm giá trị nhỏ nhất

a) $P = (x - 1)(x + 2)(x + 3)(x + 6)$; b) $Q = \dfrac{2x^2 - 8x + 7}{x^2 - 4x + 5}$

Bài 345

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \dfrac{1}{b}\right)^2$

nếu $a, b > 0$, $a + b = 1$

b) Tìm giá trị lớn nhất của $Q = xy$ nếu $3x + 5y = 12$, $x > 0$, $y > 0$

Bài 346

Giải các bất phương trình

a) $(x + 5)(x - 2) \geq 3(4x - 1) + \dfrac{(2x - 3)^2}{4}$

b) $4a^2x + a - 5 \leq 4ax - \dfrac{3}{2}x$,   a là tham số

c) $\dfrac{x + 2}{3x + 1} \leq \dfrac{x - 2}{2x - 1}$

Bài 347

Bài toán L. Tônstôi

Đại văn hào Nga L. Tônstôi đã để lại cho nhân loại các tác phẩm văn học bất hủ. Nhà văn cũng rất yêu thích toán học, có nhiều bạn bè là các nhà toán học lớn. Nhà Vật lí học nổi tiếng Xưnghc có viết trong hồi kí của ông rằng L. Tônstôi rất thích bài toán sau đây :

Một hợp tác xã làm cỏ phải cắt cỏ hai cánh đồng, cánh đồng này rộng gấp đôi cánh đồng kia. Hợp tác xã làm việc nửa ngày trên cánh đồng lớn, sau đó chia làm đôi, nửa thứ nhất ở trên cánh đồng lớn và làm đến tối thì xong, nửa thứ hai cắt cỏ trên cánh đồng nhỏ đến tối còn lại một phần hôm sau một xã viên làm một công nữa thì xong. Hỏi có bao nhiêu người cắt cỏ trong hợp tác xã ?

Bài 348

Bài toán trên bia mộ

Diophante (Điôphăng) là nhà toán học lớn của Hy Lạp. Ông sống vào khoảng thế kỉ thứ III sau Công nguyên. Ông đóng góp rất lớn cho việc xây dựng và phát triển Số học lí thuyết cũng như

thay số bằng chữ (nghĩa đen của từ đại số). Nhiều vấn đề do ông đặt nền móng ngày nay vẫn được coi là các hướng nghiên cứu, ứng dụng quan trọng của Toán học. Chẳng hạn lí thuyết phương trình Điophante, lí thuyết xấp xỉ Điophante. Tiếc rằng lịch sử còn giữ lại cho chúng ta quá ít về nhà toán học lớn của nhân loại. Những hiểu biết về cuộc đời riêng của ông chỉ có được từ những dòng chữ ghi trên bia mộ ông như sau :

"Hỡi người qua đường. Nơi đây yên nghỉ nhà toán học Diophante. Và những con số sau đây cho biết về cuộc đời của ông :

– Một phần sáu cuộc đời là thời niên thiếu huy hoàng.

– Một phần mười hai nữa trôi qua, râu trên cằm đã mọc.

– Diophante lấy vợ, một phần bảy cuộc đời trong cảnh hiếm hoi.

– Năm năm trôi qua, ông sung sướng sinh cậu con trai đầu lòng khôi ngô.

– Nhưng cậu ta chỉ sống được bằng nửa cuộc đời đẹp đẽ của người cha.

– Rút cuộc thì với nỗi buồn thương sâu sắc, ông già đã cam chịu số phận thêm 4 năm nữa từ sau khi người con lìa đời"

Bài 349

Đầu năm học một tổ học sinh được mua một số sách và vở phải trả 72 đồng. Nếu bớt đi 3 người thì mỗi người còn lại phải trả thêm 4 đồng. Hỏi tổ đó có bao nhiêu người ?

(Đề dự bị thi vào lớp 8 chuyên toán Hà Nội, 1981)

Bài 350

Trong một cuộc thi bắn, mỗi xạ thủ được bắn 10 phát. Mỗi phát trúng được 5 điểm. Mỗi phát trượt trừ 1 điểm. Nếu đạt được 30 điểm trở lên thì được giải. Hỏi phải bắn trúng bao nhiêu phát để đạt giải ?

HƯỚNG DẪN VÀ ĐÁP SỐ
BÀI TẬP ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 327

a) Nhóm ba hạng tử đầu và ba hạng tử cuối.

Đáp số : $(a + 1)(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$

b) Tách $-3a^6 = -2a^6 - a^6$.

Đáp số : $(a^6 + a^3 - 1)(a^6 - a^3 - 1)$

Bài 328

a) Thêm bớt a^4 rồi áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai bình phương.

$$P = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)(a^4 - a^2 + 1)$$

b) $Q = (x^{10} - x) + (x^5 - x^2) + x^2 + x + 1$

Áp dụng hằng đẳng thức hiệu hai lập phương.

$$Q = (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$$

Bài 329

a) Tách $11a = 9a + 2a$. $P = (a - 3)(a - 2)(a - 1)$

b) Tách $-19x = -9x - 10x$. $Q = (x + 2)(x + 3)(x - 5)$

Bài 330

Sử dụng công thức nhị thức Newton hoặc tam giác Pascal

$$Q = 7xy(x + y)(x^2 + xy + y^2)^2$$

Bài 331

Viết $f(x) = 8(x^9 - 1) - 9(x^8 - 1)$ để phân tích thành nhân tử.

Bài 332

Chia f(x) cho g(x) được thương là $x^2 - 1$ dư là $(a - 3)x + b + 4$

Buộc dư bằng 0 với mọi x thì $a - 3 = 0$; $b + 4 = 0$.

Bài 333

a) Hoặc là tách $a - y = a - x + x - y$, hoặc dùng định lí Bêdu. Kết quả : $P = (a - x)(a - y)(x - y)(a + x + y)$

b) Làm như câu a) $Q = (x - y)(y - z)(x - z)$

Bài 334

Dùng nguyên tắc Dirichlet chứng minh $P \vdots 3$ và $P \vdots 4$.

Bài 335

Làm như bài trên, chú ý rằng $288 = 3^2 . 2^5$

Bài 336

Hiển nhiên phải có điều kiện $m > n \geq 0$. Nếu $m = 0$ thì $2^m - 2^0$ là số lẻ không chia hết 1984. Vậy phải có $m > n > 0$. Khi đó $2^m - 2^n = 1984 \Leftrightarrow 2^n(2^{m-n} - 1) = 64 . 31 \Rightarrow 2^n | 64 . 31 \Rightarrow 2^n | 64$ (vì $(31, 2^n) = 1$).

Ta cũng thấy : $64 | 2^n(2^{m-n} - 1) \Rightarrow 64 | 2^n$

Từ đó suy ra $64 = 2^n$, $n = 6$, $2^{m-6} - 1 = 31$, $m = 11$

Bài 337

$$P = \frac{x^4 + x^3 + x^2 + x - 29}{x^2 + 1} = x^2 + x + \frac{-30}{x^2 + 1}$$

Để P nhận giá trị nguyên với x nguyên thì $x^2 + 1$ phải là ước dương của 30, tức $x^2 + 1 = 1, 2, 5, 10$, suy ra $x = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

Bài 338

a) $P = \dfrac{a - b}{a + b}$ b) $Q = \dfrac{1}{abc}$

Bài 339

$$\frac{a}{b - c} + \frac{b}{c - a} + \frac{c}{a - b} = 0 \Rightarrow \frac{a}{b - c} = \frac{b}{a - c} - \frac{c}{a - b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b - c} = \frac{ab - b^2 - ac + c^2}{(a - c)(a - b)} \Rightarrow \frac{a}{(b - c)^2} = \frac{ab - ac - b^2 + c^2}{(a - c)(a - b)(b - c)}$$

Hoán vị vòng ta được $\dfrac{b}{(c-a)^2} = \dfrac{bc - ba - c^2 + a^2}{(b-c)(b-a)(c-a)}$

$\dfrac{c}{(a-b)^2} = \dfrac{ac - bc - a^2 + b^2}{(c-a)(c-b)(a-b)}$. Cộng vế với vế các kết quả trên ta có đpcm.

Bài 340

Đưa về :

$$\frac{x-a}{bc} - \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{x-b}{ac} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + \frac{x-c}{ab} - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 0$$

Nếu $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{ab} \neq 0 \qquad x = a + b + c$

Nếu $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ac} + \dfrac{1}{ab} = 0$ mọi số hữu tỉ đều là nghiệm của phương trình.

Bài 341

Đáp số : $m = 0$, $m = 2$

Bài 342

a) Vô nghiệm b) $x = 9$

Bài 343

Điều kiện $x \neq m - 2$, $x \neq -m - 2$

Nếu $m \neq 0$, $m \neq \pm 1$ phương trình có nghiệm $x = \dfrac{2}{m-1}$

Nếu $m = 0$, $m = \pm 1$ hoặc $m = 3$ phương trình vô nghiệm

Bài 344

a) $P = (x^2 + 5x)^2 - 36$ đạt giá trị nhỏ nhất $MinP = -36$ khi $x = 0$ hoặc $x = -5$

b) $Q = 2 - \dfrac{3}{(x-2)^2 + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất $Min\ Q = -1$ khi $x = 2$

Bài 345

a) Sử dụng bất đẳng thức $a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$ và điều kiện $a + b = 1$ ta suy ra $\text{MinP} = \frac{25}{2}$ đạt được khi $a = b = \frac{1}{2}$.

b) $Q = xy = \frac{3x \cdot 5y}{15}$. Tổng $3x + 5y$ bằng hằng số nên tích $3x.5y$ đạt giá trị lớn nhất khi $3x = 5y = 6$.

$\text{MaxQ} = 2,4$ đạt khi $x = 2$, $y = 1,2$.

Bài 346

a) $x \leq \frac{-19}{24}$

b) $x \leq \dfrac{a-5}{-4a^2 + 4a - \frac{3}{2}}$

c) $x < \frac{-1}{3}$; $0 \leq x < \frac{1}{2}$ và $x \geq 8$

Bài 347

Gọi x là số người cắt cỏ, x nguyên dương,

$$\frac{3x}{4} = 2\left(\frac{x}{4} + 1\right) \Rightarrow x = 8$$

Bài 348

Điophăng thọ 84 tuổi, lấy vợ năm 21 tuổi, có con năm 38 tuổi

Bài 349

9 người.

Bài 350

7 phút.

MỤC LỤC